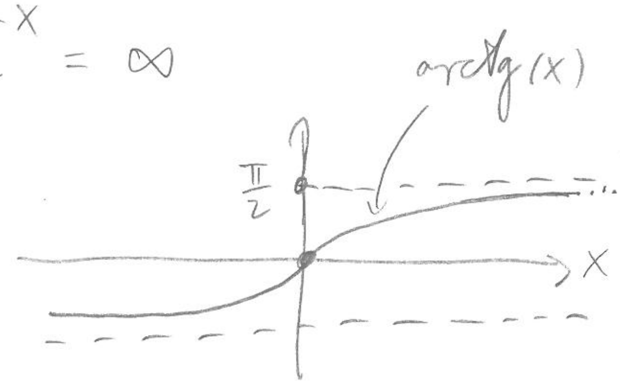
<u>DEF</u>: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, HA BÁRMILYEN $\{a_n\}$ SOROZATRA, AMIRE $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = A$ TELJESÜL

<u>PL</u>: $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}$:



$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x-4+4}{x-2} = \lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{4}{x-2}\right) =$$

$$= 2 + \frac{4}{\infty - 2} = 2$$

<u>DEF</u>: AZ f FV. FOLYTONOS AZ x_0 HELYEN, HA $\boxed{x_0 \in \mathcal{D}_f}$ ÉS $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

<u>PL</u>: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5}, & \text{HA } x \neq 5 \\ 10, & \text{HA } x = 5 \end{cases}$

EZ A FÜGGVÉNY FOLYTONOS $\boxed{x_0 = 5}$ -BEN,

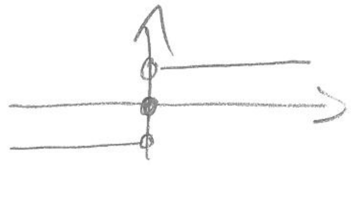
LÁSD 52. OLDAL TETEJE.

<u>DEF</u>: AZ f FÜGGVÉNY FOLYTONOS, HA MINDEN $x \in \mathcal{D}_f$-BELI PONTBAN FOLYTONOS.

(FOLYTONOS, HA A CERUZA FELEMELÉSE NÉLKÜL LE TUDOM RAJZOLNI A GRAFIKONT)

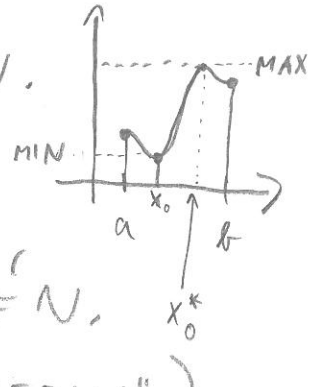
<u>PL</u>: e^x, $\ln(x)$, x^{10}, $\sin(x)$, $\arctan(x)$, ...

NEM FOLYTONOS: PL: $\operatorname{sgn}(x)$:



<u>TÉTEL</u> (WEIERSTRASS): $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ <u>FOLYTONOS</u> (AZAZ $\mathcal{D}_f = [a,b]$ <u>ZÁRT</u> <u>INTERVALLUM</u>),

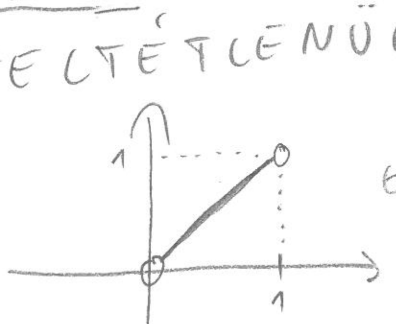
AKKOR VAN OLYAN $x_0 \in [a,b]$, HOGY $f(x_0) \le f(x)$ MINDEN $x \in [a,b]$ ESETÉN.



HASONLÓAN: VAN OLYAN $x_0^* \in [a,b]$, HOGY $f(x_0^*) \ge f(x)$ MINDEN $x \in [a,b]$ ESETÉN.

(AZAZ: MIN ÉS MAX „FELVÉTETIK")

<u>MEGJ</u>: NYÍLT INTERVALLUM ESETÉN NEM FELTÉTLENÜL IGAZ: PL: $\boxed{f(x) = x}$, $x \in (0,1)$:

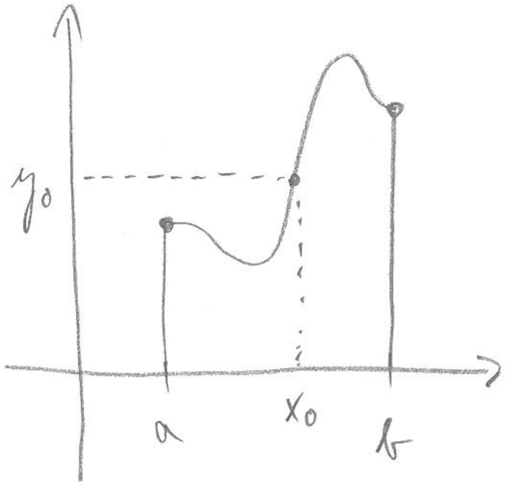


← BÁRMELYIK $0 < x_0 < 1$-HEZ VAN OLYAN $x \in (0,1)$, HOGY $f(x_0) > f(x)$

ÉS OLYAN IS, HOGY $f(x_0) < f(x)$

56. OLDAL

TÉTEL: (BOLZANO): HA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ FOLYTONOS, AKKOR MINDEN $y_0\in[f(a),f(b)]$-HEZ VAN OLYAN $x_0\in[a,b]$, HOGY $\boxed{f(x_0)=y_0}$



PL.: $f(x)=x^3-x-1$

KELL: x_0, HOGY $f(x_0)=0$

$f(0)=0^3-0-1=-1$

$f(2)=8-2-1=5$

TEHÁT BOLZANO $\Rightarrow$ VAN $x_0\in[0,2]$: $f(x_0)=0$

INTERVALLUM-FELEZÉS: $f(1)=1^3-1-1=-1$

TEHÁT BOLZANO $\Rightarrow$ VAN $x_0\in[1,2]$: $f(x_0)=0$ STB.

HA f ÉS g FOLYTONOS, AKKOR

$f\pm g$, $f\cdot g$, $c\cdot g$, f/g IS FOLYTONOS

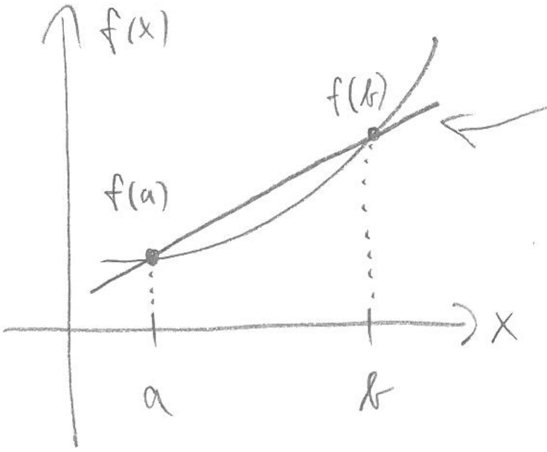
(HA $0\notin R_g$)

$f\circ g$ IS FOLYTONOS: $(f\circ g)(x)=f(g(x))$

ÖSSZETETT FÜGGVÉNY: f ÉS g KOMPOZÍCIÓJA.

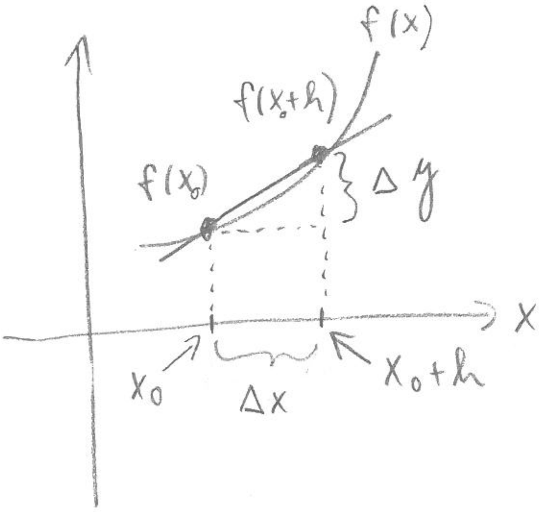
57. OLDAL

DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS (DERIVÁLÁS):



SZELŐ EGYENES MEREDEKSÉGE:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



SZELŐ MEREDEKSÉGE:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

KÜLÖNBSÉGI HÁNYADOS
(DIFFERENCIA HÁNYADOS)

AZ f GÖRBÉJÉNEK MEREDEKSÉGE
A $P(x_0, f(x_0))$ PONTBAN = ÉRINTŐ EGYENES
MEREDEKSÉGE $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$

$= f'(x_0) =$ EZ AZ f DERIVÁLTJÁNAK ÉRTÉKE
AZ x_0 HELYEN.

HA EZ A HATÁRÉRTÉK LÉTEZIK x_0-BAN: f DIFF.HATÓ x_0-BAN

— " — MINDEN $x_0 \in D_f$-BEN: f DIFF.HATÓ.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \left(\frac{d}{dx} f\right)(x)$$

f DERIVÁLTJA f'

f DIFFERENCIÁLHÁNYADOSA f'

PL: $y(t)$ = RAKÉTA MAGASSÁGA t-KOR

$y'(t) = \frac{dy}{dt}(t)$ = RAKÉTA PILLANATNYI SEBESSÉGE t-KOR

PL: $f(x) \equiv c$ (KONSTANS FÜGGVÉNY)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

PL: $f(x) = -2x+1$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-2\cdot(x+h)+1)-(-2x+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h} = \lim_{h\to 0} -2 = -2$$

PL: $f(x) = x^2$: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

59. OLDAL

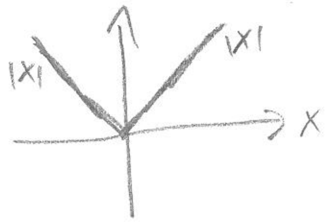
PL: TUDJUK: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)}$ SPEC: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

LÁSD 54. OLDAL

$$f(x)=e^x \quad f'(x)=\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^x\cdot(e^h-1)}{h} = e^x\cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = e^x\cdot 1 = e^x$$

PL: $f(x)=|x|$ $\boxed{x_0=0}$ $f'(x_0)$ NEM LÉTEZIK:



← NEM TUDUNK ÉRINTŐT HÚZNI A GÖRBÉNKHEZ AZ ORIGÓBAN!

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{|h|-0}{h} = 1 \quad (\text{JOBB OLDALI MEREDEKSÉG})$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

(BAL OLDALI MEREDEKSÉG)

TEHÁT A $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ HATÁRÉRTÉK NEM LÉTEZIK, LÁSD 52. OLDAL.

TÉTEL: f DIFFERENCIÁLHATÓ $\Rightarrow$ f FOLYTONOS, DE f FOLYTONOS $\not\Rightarrow$ f DIFF.HATÓ

ELLENPÉLDA: $f(x)=|x|$

DIFFERENCIÁLÁSI SZABÁLYOK:

$$\boxed{\frac{d}{dx} c \equiv 0}$$ ← KONSTANS DERIVÁLTJA 0

$$\boxed{(c \cdot f)' = c \cdot f'} \quad \boxed{\frac{d}{dx} c \cdot f = c \cdot \frac{d}{dx} f}$$ ← KONSTANS SZORZÓ KIEMELHETŐ

$$\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g'} \quad \boxed{\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx} u \pm \frac{d}{dx} v}$$

ÖSSZEG/KÜLÖNBSÉG TAGONKÉNT DERIVÁLHATÓ

SZORZAT DERIVÁLÁSA: $\boxed{(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'}$

$$\frac{d}{dx}(u \cdot v)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} = \text{TRÜKK}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x+h) \cdot v(x) + u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{u(x+h)}_{\to u(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right)}_{v'(x)} + \lim_{h \to 0} \underbrace{\left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right)}_{u'(x)} \cdot v(x)$$

$$= u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} v\right)(x) + \left(\frac{d}{dx} u\right)(x) \cdot v(x)$$

61. OLDAL

$\boxed{\text{HÁNYADOS DERIVÁLÁSA}}$: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

LÁNCSZABÁLY: $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

$h(x) = f(g(x))$: $\underbrace{h'(x)}_{\frac{dh}{dx}} = \underbrace{f'(g(x))}_{\frac{dh}{dg}} \cdot g'(x)$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

PL: $\underbrace{\exp}_{f}(\underbrace{\ln}_{g}(x)) \equiv x$, DERIVÁLJUK MINDKÉT OLDALT!

LÁSD 60. OLDAL

$\boxed{\exp' = \exp}$

$\exp'(\ln(x)) \cdot \ln'(x) = 1$

$\underbrace{\exp(\ln(x))}_{x} \cdot \ln'(x) = 1$ $\Rightarrow x \cdot \ln'(x) = 1 \Rightarrow \boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$

PL: $x^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln(x))$, DERIVÁLJUK MINDKÉT OLDALT!

$\frac{d}{dx} x^\alpha = \exp'(\alpha \cdot \ln(x)) \cdot \alpha \cdot \ln'(x) = \exp(\alpha \cdot \ln(x)) \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} =$

$= x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$: $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}}$

62. OLDAL