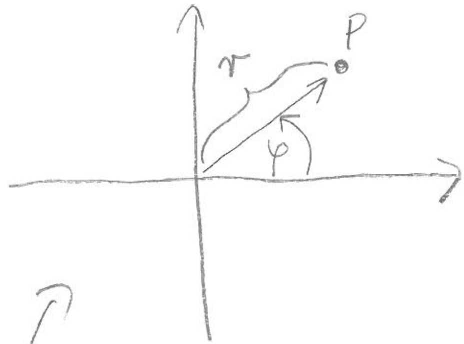
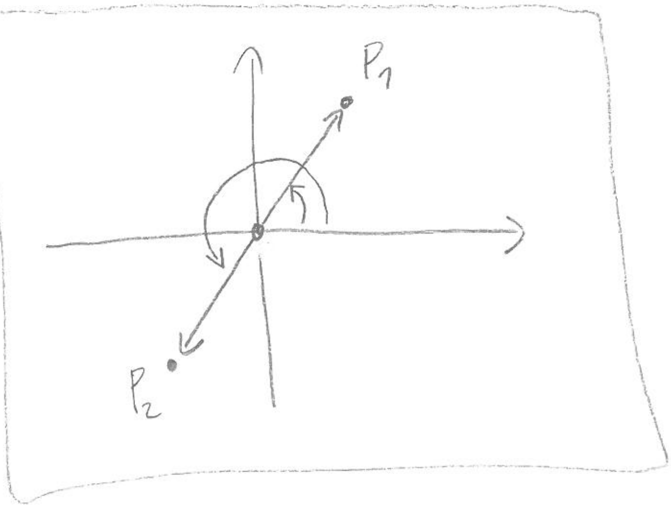
③ POLÁRKOORDINÁTÁKKAL:



PL:



r NEGATÍV IS LEHET!

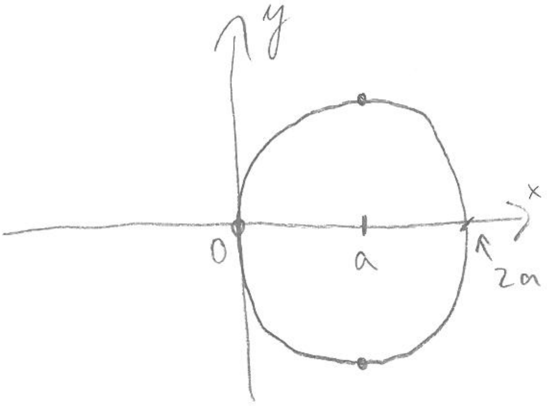
$P_1(x=2,\ y=2\cdot\sqrt{3}) \longrightarrow P_1\left(\varphi=\frac{\pi}{3},\ r=4\right)$

$P_2(x=-2,\ y=-2\cdot\sqrt{3}) \longrightarrow P_2\left(\varphi=\frac{4}{3}\pi,\ r=4\right) =$

$P_2\left(\varphi=\frac{1}{3}\pi,\ r=-4\right)$

ORIGÓ KÖZÉPPONTÚ a SUGARÚ KÖR KÉPLETE POLÁRKOORDINÁTA-RENDSZERBEN: $\boxed{r=a}$

PL: IMPLICIT EGYENLET: $(x-a)^2+y^2=a^2$



POLÁR:

$(r\cdot\cos(\varphi)-a)^2+(r\cdot\sin(\varphi))^2=a^2$

$\boxed{r^2\cdot\cos^2\varphi-2ar\cos\varphi+a^2+r^2\cdot\sin^2\varphi = a^2}$

$r^2\cdot\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}-2ar\cos\varphi=0 \implies \boxed{r=2a\cos\varphi}$

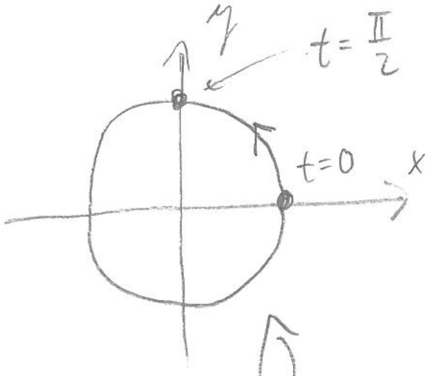
EXPLICIT POLÁR EGYENLET

47. OLDAL

4. PARAMÉTERES MEGADÁS:

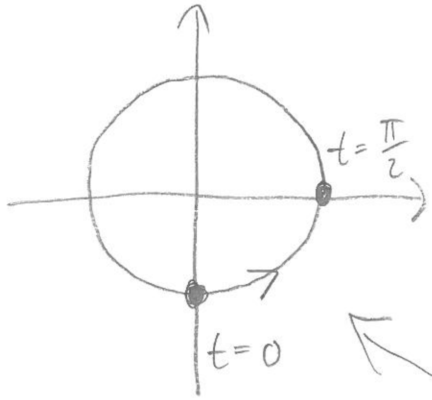
$$\boxed{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \quad t \in \mathbb{R}}$$

PL:



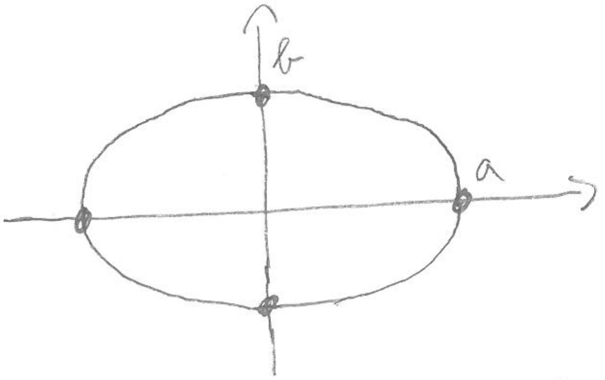
$$\boxed{\begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{array}}$$

UGYANEZ A KÖR MÁSKÉPP PARAMÉTEREZVE:



$$\boxed{\begin{array}{l} x = \sin(t) \\ y = -\cos(t) \end{array}}$$

ELLIPSZIS:

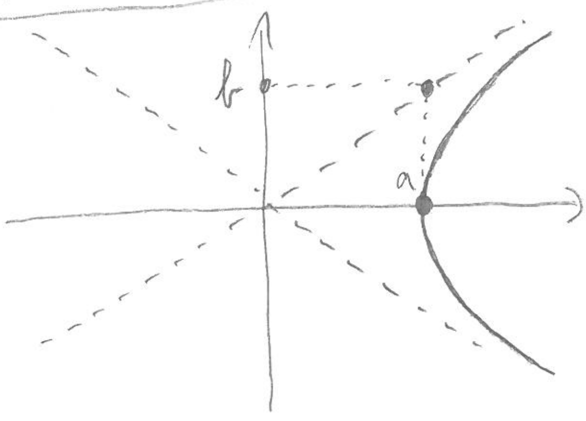


IMPLICIT: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

PARAMÉTERES: $\boxed{\begin{array}{l} x = a \cdot \cos(t) \\ y = b \cdot \sin(t) \end{array}}$

POLÁR: $\boxed{r = \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \varphi + b^2 \cdot \sin^2 \varphi}}$

HIPERBOLA:



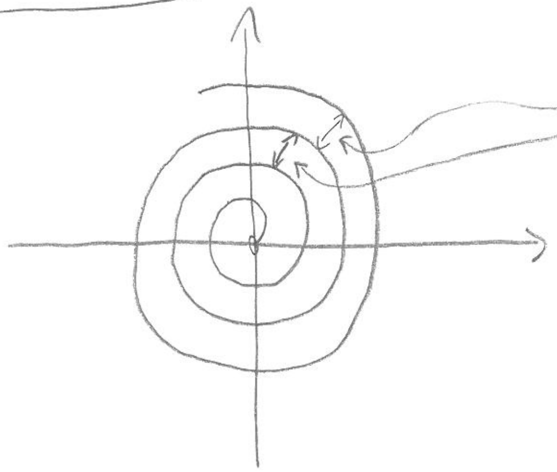
IMPLICIT: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$

PARAMÉTERES: $\boxed{\begin{array}{l} x = a \cdot \operatorname{ch}(t) \\ y = b \cdot \operatorname{sh}(t) \end{array}}$

SPIRÁLOK: POLÁRKOORDINÁTÁKKAL:

ARCHIMÉDESZI SPIRÁL:

$\boxed{r = a\cdot\varphi}$ $\boxed{a>0}$ ← PARAMÉTER

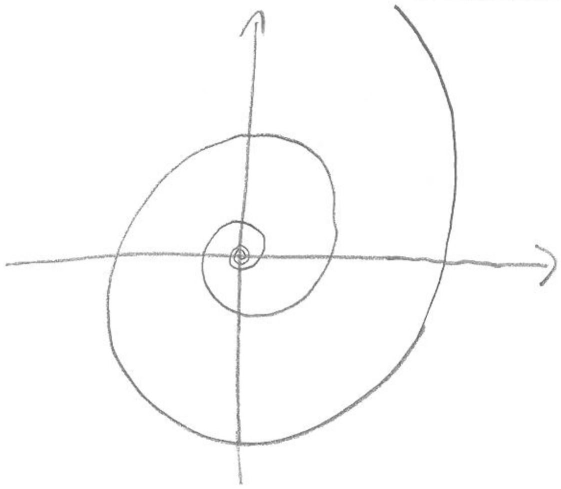


EZ A TÁVOLSÁG $= a\cdot 2\pi$

LOGARITMIKUS SPIRÁL:

$$\boxed{r = \exp(k\cdot(\varphi+\varphi_0))}$$

$\boxed{k, \varphi_0}$ ← PARAMÉTEREK



ÖNHASONLÓ: $\exp(k\cdot 2\pi)$-VEL NAGYÍTVA ÖNMAGÁT KAPOM.

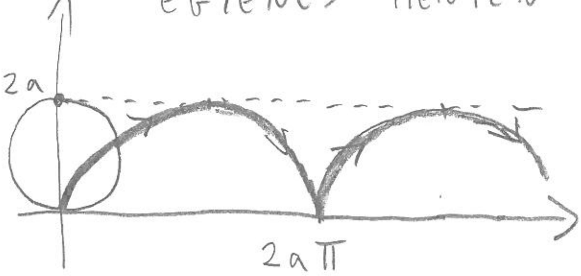
α SZÖGGEL ELFORGATOM $\Longleftrightarrow$
$e^{k\cdot\alpha}$-SZOROSÁRA NAGYÍTOM

MIÉRT? $\exp(k\cdot((\varphi+\alpha)+\varphi_0)) = \exp(k\cdot\alpha)\cdot\exp(k\cdot(\varphi+\varphi_0))$

CIKLOIS:

$x(t) = a\cdot(t-\sin(t))$

$y(t) = a\cdot(1-\cos(t))$



EGYENES MENTÉN CSÚSZÁSMENTESEN GÖRDÜLŐ KERÉK EGY PONTJÁNAK PÁLYÁJA

49. OLDAL

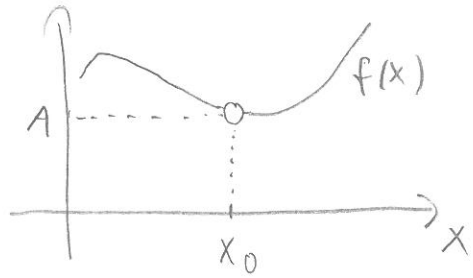
FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE:

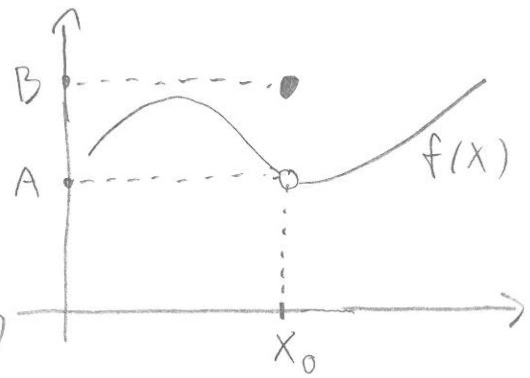
DEF: AZ f FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE AZ x_0 HELYEN A, HA MINDEN OLYAN $\{a_n\}$ SOROZATRA, AMIRE $a_n \neq x_0$ ÉS $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, AZ $\{f(a_n)\}$ SOROZAT A-HOZ KONVERGÁL: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = A$

JELÖLÉS: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A}$

MEGJ: ATTÓL MÉG, HOGY x_0 NEM ELEME D_f-NEK, A HATÁRÉRTÉKE $x \to x_0$ ESETÉN MÉG LÉTEZHET!

PL:





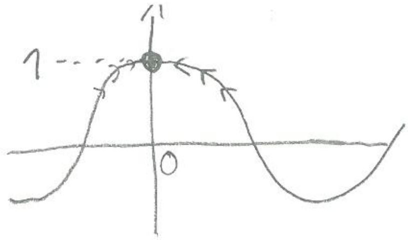
ITT: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A}$ ✓

$\boxed{x_0 \notin D_f}$

ITT: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A}$

$\boxed{x_0 \in D_f}$ $\boxed{f(x_0) = B \neq A}$

PL: $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$;



$\boxed{\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to 0} x = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = ?}$ $\leftarrow \frac{0}{0}$

NEVEZETES HATÁRÉRTÉK: $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$ $\leftarrow$ $\boxed{\text{NEM BIZ}}$

EZT FELHASZNÁLVA:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = ?$$ EZ IS $\frac{0}{0}$ TÍPUSÚ.

$$? = 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 2\cdot 1 = 2$$

$\boxed{y = 2x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = ?$$ EZ IS $\frac{0}{0}$ TÍPUSÚ.

$$? = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}{x^2\cdot(1+\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))} =$$

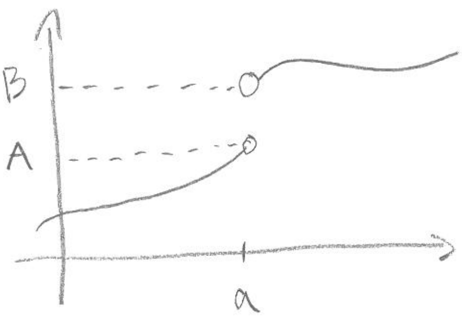
$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \frac{1}{1+1}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{51. OLDAL}}$

PL: $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{x-5} = ?$ EZ IS $\dfrac{0}{0}$ TÍPUSÚ

$$? = \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)\cdot(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 5+5 = 10$$

JOBB- ÉS BALOLDALI HATÁRÉRTÉK:



$$\boxed{\lim_{x\to a_-} f(x) = A} \qquad \boxed{\lim_{x\to a_+} f(x) = B}$$

f BALOLDALI HATÁRÉRTÉKE a-BAN A

f JOBBOLDALI HATÁRÉRTÉKE a-BAN B

HA $A \neq B$, AKKOR $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ NEM LÉTEZIK.

$$\boxed{\lim_{x\to a_-} f(x) = \lim_{x\to a_+} f(x) = A} \iff \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = A}$$

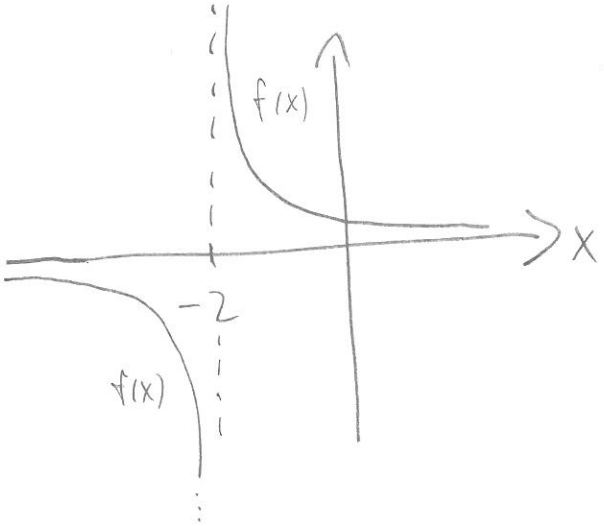
PRECÍZ DEF: HA MINDEN OLYAN $\{a_n\}$ SOROZATRA, AMIRE $\boxed{(1)\ a_n \to x_0 \quad (2)\ a_n < x_0}$ IGAZ, HOGY $f(a_n) \to A$, AKKOR AZT MONDJUK, HOGY $\boxed{\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = A}$

HASONLÓAN: $\underbrace{\boxed{(1)\ a_n \to x_0 \quad (2)\ a_n > x_0} \Rightarrow \boxed{f(a_n) = A}}$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a_+} f(x) = A}$$

52. OLDAL

PL:

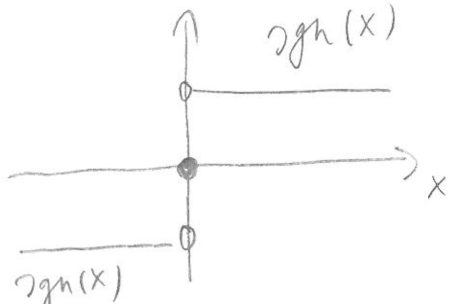


$$f(x)=\frac{1}{x+2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to(-2)_-} f(x)=-\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to(-2)_+} f(x)=+\infty}$$

PL:



$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0_+} \operatorname{sgn}(x)=1\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0_-} \operatorname{sgn}(x)=-1\end{array}\right\}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ LIMESZ NEM LÉTEZIK

NEVEZETES HATÁRÉRTÉKEK:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ | $\boxed{1^\infty \text{ TÍPUSÚ}}$ NEM BIZ

(2) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0_+}\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)=\frac{1}{\ln(a)}}$ $\boxed{\frac{0}{0} \text{ TÍPUSÚ}}$

BIZ: $\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)=\log_a\left((1+x)^{1/x}\right)=\frac{\ln\left((1+x)^{1/x}\right)}{\ln(a)}$

TEHÁT: $\lim\limits_{x\to 0_+} \text{"} = \lim\limits_{x\to 0_+}\frac{\ln\left((1+x)^{1/x}\right)}{\ln(a)} =$

LEGYEN $y=1/x$

$\boxed{x\to 0_+}\Rightarrow\boxed{y\to\infty}$

$=\frac{1}{\ln(a)}\cdot\lim\limits_{y\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)\overset{(1)}{=}\frac{1}{\ln(a)}\cdot\ln(e)=\frac{1}{\ln(a)}$

53. OLDAL

(3) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)}$ $\boxed{\frac{0}{0} \text{ TÍPUSÚ}}$ BIZ: $\boxed{a^x - 1 = y}$

EKKOR $a^x = y+1$, $x = \log_a(y+1)$

HA $\boxed{x \to 0_+}$, AKKOR $\lim\limits_{x\to 0_+} a^x - 1 = a^0 - 1 = 1-1 = 0$

TEHÁT $\boxed{y \to 0_+}$

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0_+} \frac{y}{\log_a(y+1)} \overset{(2)}{=} 1 \Big/ \left(\frac{1}{\ln(a)}\right) = \ln(a)$$

---

(4) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0_+} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu}$ $\boxed{\frac{0}{0} \text{ TÍPUSÚ}}$ NEM BIZ

HATÁRÉRTÉKEK TULAJDONSÁGAI:

HA $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, AKKOR

$\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

$\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot A$ $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ (HA $B \neq 0$)