HA $\boxed{\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0}$, AKKOR $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

PL: $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$, MIVEL $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

PL: $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} -\ln(n) = -\infty$

PL: $\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot\sqrt{n} - n^{1/4} + 2}{\ln(n) - 2\cdot\sqrt{n}} = ?$ TRÜKK:

KERESSÜK A SZÁMLÁLÓ ÉS A NEVEZŐ DOMINÁNS TAGJÁT: $\sqrt{n} \gg n^{1/4}$, $\sqrt{n} \gg 2$, $\sqrt{n} \gg \ln(n)$

ÉS OSSZUK LE A SZÁMLÁLÓT ÉS A NEVEZŐT A DOMINÁNS TAGGAL:

$$? = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - n^{1/4}/\sqrt{n} + 2/\sqrt{n}}{\ln(n)/\sqrt{n} - 2} = \frac{3-0+0}{0-2} = \frac{-3}{2}$$

PL: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+20} = ?$ TRÜKK:

$$\boxed{a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}} \Longrightarrow \frac{(n^2+3n) - (n^2+20)}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+20}} = ★$$

32. OLDAL

$$\star = \frac{3n-20}{n\cdot\left(\sqrt{1+3/n}+\sqrt{1+\frac{20}{n^2}}\right)} = \frac{3-20/n}{\sqrt{1+3/n}+\sqrt{1+\frac{20}{n^2}}},$$

TEHÁT:

$$? = \lim_{n\to\infty} \frac{3-20/n}{\sqrt{1+3/n}+\sqrt{1+\frac{20}{n^2}}} = \frac{3-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{3}{2}$$

PL: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n} = ?$ JOLLY JOKER (LÁSD 29. OLDAL)

$$\frac{n^2-1}{n^2} = 1-\frac{1}{n^2} = 1+a_n, \text{ AHOL } \boxed{a_n = -\frac{1}{n^2}}$$

$\boxed{b_n = 2n}$ $\boxed{a_n \to 0}$ ✓ $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{n} = 0$

TEHÁT $? = e^0 = 1$

PL: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{1+2n}\right)^{n} = ?$ VIGYÁZAT:

$$\frac{1+n}{1+2n} = 1+a_n \Rightarrow a_n = \frac{1+n}{1+2n} - \frac{1+2n}{1+2n} = \frac{-n}{2n+1} \to -\frac{1}{2}$$

JOLLY JOKER CSAK AKKOR MŰKÖDIK, HA $\boxed{a_n \to 0}$

$$? = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n+1/2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+1/2}\right)^n =$$

$$= 0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1/2}{n+1/2}\right)^n = 0\cdot e^{1/2} = 0$$

PL: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)=?$

$\boxed{1+2+\ldots+n=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}}$, TEHÁT

$$\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}=\frac{(n+1)\cdot n}{2\cdot(n+2)}-\frac{n}{2}=$$

$$=\frac{(n^2+n)-n\cdot(n+2)}{2\cdot(n+2)}=\frac{n-2n}{2n+4}=\frac{-n}{2n+4}$$

$$? = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2n+4}=-\frac{1}{2}$$

$a_n=\sqrt{\dfrac{n-4}{n}}$ $\quad\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A}$, $\{a_n\}$ MONOTON NÖVŐ

ADJUK MEG AZT A LEGKISEBB N KÜSZÖBINDEXET, AMELYRE TELJESÜL, HOGY $n\geq N$ ESETÉN $|a_n-A|<\varepsilon=0{,}1$

MEGOLDÁS: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1}$, $|a_n-A|=\left|\sqrt{\dfrac{n-4}{n}}-1\right|=$

$$=1-\sqrt{\frac{n-4}{n}}\overset{\text{KELL}}{<}0{,}1\iff 0.9<\sqrt{\frac{n-4}{n}}\iff$$

$$0.81<\frac{n-4}{n}\iff 0.81\cdot n<n-4\iff$$

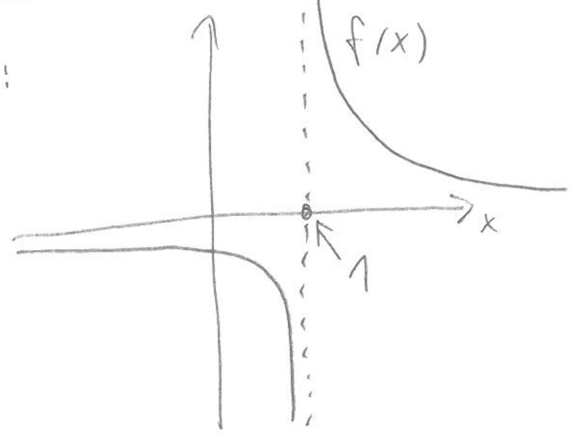
$$4<0.19\cdot n\iff\frac{4}{0.19}<n\iff\boxed{21.5<n}\implies\boxed{N=22}$$

FÜGGVÉNYEK: f EGY FÜGGVÉNY

f ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNYA: $\mathcal{D}_f$

f ÉRTÉKKÉSZLETE: $\mathcal{R}_f$

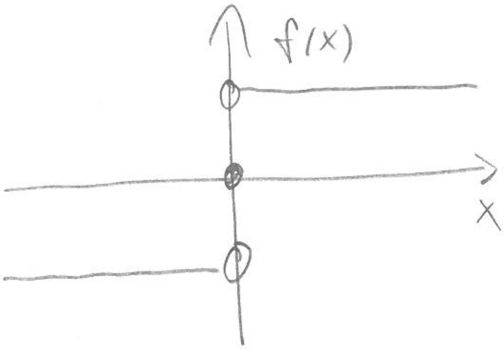
PL: $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$:



$$\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$$

$$\boxed{\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

PL: $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{HA } x > 0 \\ 0, & \text{HA } x = 0 \\ -1, & \text{HA } x < 0 \end{cases}$

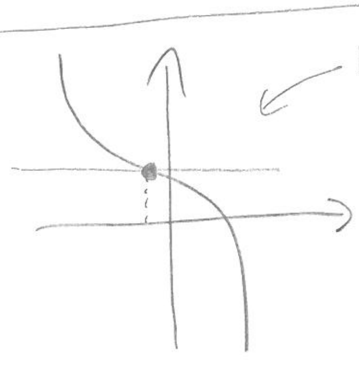


$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_f = \{-1, 0, 1\}$

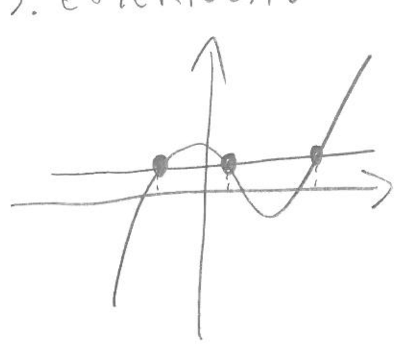
DEF: f KÖLCSÖNÖSEN EGYÉRTELMŰ, HA

$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ MINDEN $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$ ESETÉN

PL:



KÖLCS. EGYÉRTELMŰ



NEM KÖLCS. EGYÉRTELMŰ

35. OLDAL

f KÖLCSÖNÖSEN EGYÉRTELMŰ, HA MINDEN R_f-BELI y-HOZ CSAK EGY (ÉS NEM TÖBB) OLYAN D_f-BELI x TARTOZIK, AMIRE $f(x)=y$

---

f MONOTON NÖVŐ, HA $\boxed{x_1 \leq x_2}$ ESETÉN $\boxed{f(x_1) \leq f(x_2)}$

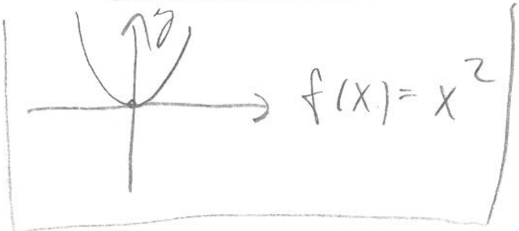
— " — CSÖKKENŐ, HA $\boxed{x_1 \leq x_2}$ — " — $\boxed{f(x_1) \geq f(x_2)}$

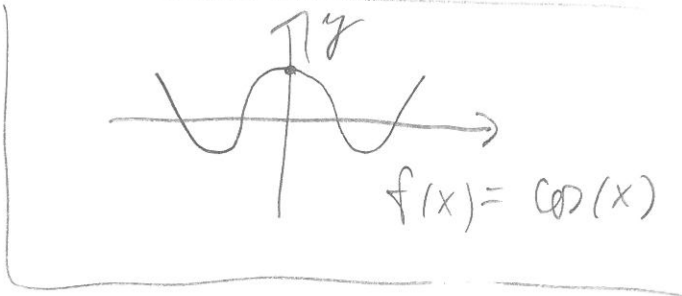
f SZIGORÚ MONOTON NÖVŐ, HA $\boxed{x_1 < x_2} \Longrightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$

f PÁROS, HA $\boxed{f(-x) = f(x)}$ $\underbrace{\text{MINDEN } x \in D_f\text{-RE}}$

f PÁRATLAN, HA $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ — " —

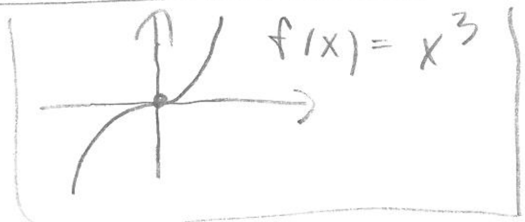
PÁROS:

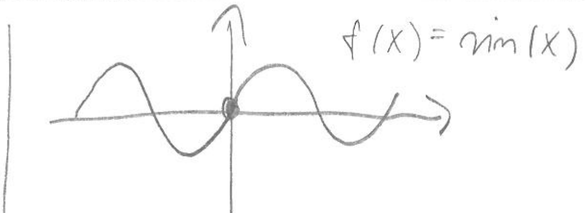




GRAFIKON TENGELYESEN SZIMMETRIKUS AZ y TENGELYRE

PÁRATLAN:





GRAFIKON KÖZÉPPONTOSAN SZIMM. AZ ORIGÓRA

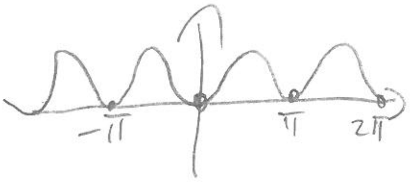
36. OLDAL

f PERIODIKUS, ÉS A PERIÓDUSHOSSA l, HA

$f(x)=f(x+l)$ MINDEN $x \in D_f$ - RE

$f(x)=\sin(x)$ PERIÓDUSA 2π

$g(x)=\sin^2(x)$ PERIÓDUSA π :



INVERZ FÜGGVÉNYEK:

HA f KÖLCSÖNÖSEN EGYÉRTELMŰ, AKKOR

f INVERZ FÜGGVÉNYE AZ AZ f^{-1} FÜGGVÉNY,

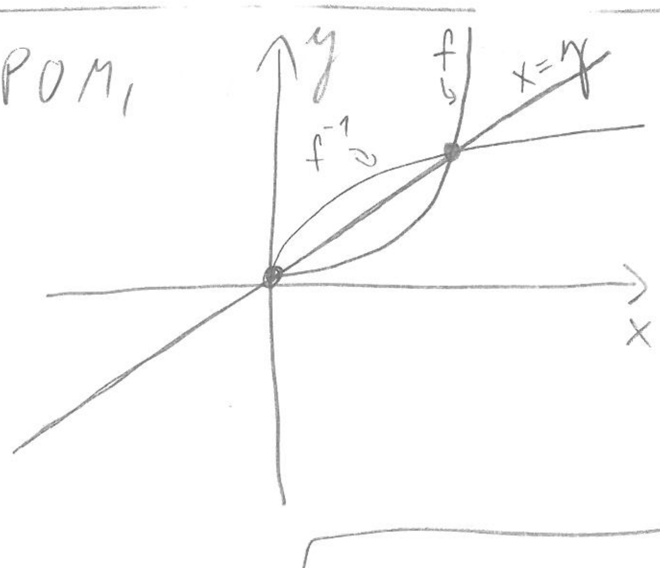
AMIRE $\boxed{f(x)=y} \Longleftrightarrow \boxed{f^{-1}(y)=x}$

ÉS EKKOR f ÉRTÉKKÉSZLETE = f^{-1} ÉRT. TARTOMÁNYA

f ÉRT. TART = f^{-1} ÉRT. KÉSZL.

$$f^{-1}(f(x)) \equiv x \qquad f(f^{-1}(x)) \equiv x$$

f^{-1} GRAFIKONJÁT ÚGY KAPOM, HOGY f GRAFIKONJÁT TÜKRÖZÖM AZ $\boxed{x=y}$ EGYENESRE:



PL: $f(x) = \sqrt{2x+3} + 5$

$\mathcal{D}_f = \{ x : 2x+3 \geq 0 \} = [-\frac{3}{2}, +\infty)$

$\mathcal{R}_f = [5, +\infty)$ $\boxed{f^{-1}(y) = ?}$

$\boxed{f(x) = y} \iff \boxed{\sqrt{2x+3} + 5 = y} \iff \boxed{\sqrt{2x+3} = y-5}$

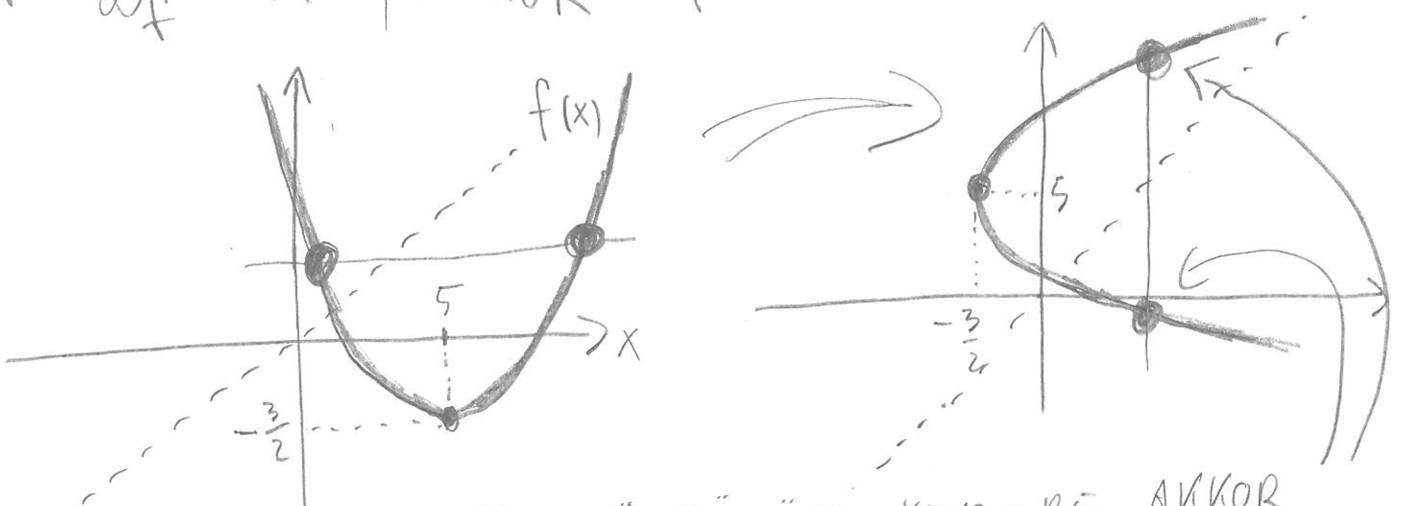
$\iff \boxed{2x+3 = (y-5)^2} \iff \boxed{x = \frac{(y-5)^2 - 3}{2}}$

TEHÁT $\boxed{f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \cdot ((y-5)^2 - 3)}$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = [5, +\infty)$, $\mathcal{R}_{f^{-1}} = [-\frac{3}{2}, +\infty)$

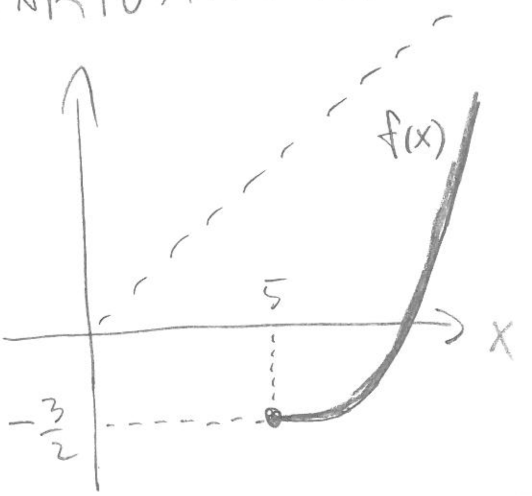
PL: LEGYEN $f(x) = \frac{1}{2} \cdot ((x-5)^2 - 3)$ $\boxed{f^{-1} = ?}$

HA $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, AKKOR f NEM KÖLCS. EGYÉRT.!



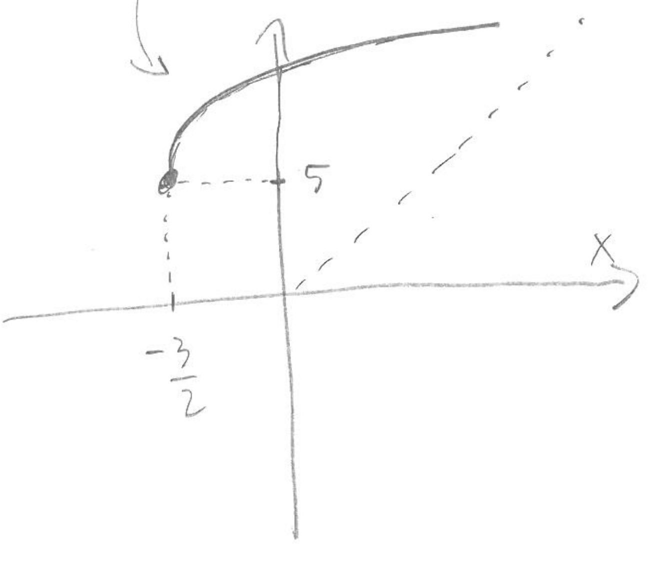
HA TÜKRÖZÖM $x=y$-RE, AKKOR NEM KAPOK FÜGGVÉNY GRAFIKONT!
(KÉT PONT EGYMÁS FELETT)

EZÉRT KELL LESZŰKÍTENI AZ $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\left((x-5)^2-3\right)$ FÜGGVÉNY ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNYÁT: HA $\mathcal{D}_f=[5,+\infty)$, AKKOR



ÍGY MÁR KÖLCSÖNÖSEN EGYÉRTELMŰ LESZ f, ÍGY LEHET VENNI AZ INVERZ-FÜGGVÉNYÉT,

AMI $\boxed{f^{-1}(x)=\sqrt{2x+3}+5}$ LESZ:



$$y=\frac{1}{2}\cdot\left((x-5)^2-3\right)$$

$$2y+3=(x-5)^2$$

$$\sqrt{2y+3}=x-5$$

$$x=\sqrt{2y+3}+5=f^{-1}(y)$$

ÉS ÁLTALÁBAN IS: HA $g=f^{-1}$, AKKOR $g^{-1}=f$

(HA KÉTSZER TÜKRÖZÖM A GRAFIKONT AZ $x=y$ TENGELYRE, AKKOR VISSZAKAPOM AZ EREDETIT)