DEF.: AZ $\{a_n\}$ SOROZAT HATÁRÉRTÉKE AZ A SZÁM, HA MINDEN $\varepsilon>0$ -HOZ LEHET TALÁLNI OLYAN N-ET, HOGY $n \geq N$ ESETÉN $|a_n - A| < \varepsilon$.

JELÖLÉS: $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = A}$ $\boxed{a_n \to A}$

$\{a_n\}$ KONVERGENS $\Longleftrightarrow$ VAN HATÁRÉRTÉKE

SZÓBAN: $\boxed{a_n \to A}$, HA A BÁRMILYEN KICSI ε SUGARÚ $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ KÖRNYEZETÉHEZ VAN OLYAN N KÜSZÖBINDEX, HOGY $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ MÁR MIND EBBEN AZ $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ KÖRNYEZETBEN VAN.

PL.: $\boxed{a_n = \frac{n}{2n+1}}$ HOGY TALÁLJUK KI, HOGY MIHEZ KONVERGÁL?

HA $n=10^6$, AKKOR $a_n = a_{10^6} = \frac{10^6}{2\cdot 10^6+1} \approx \frac{1}{2}$

TEHÁT $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}}$ ÉS MI AZ $\boxed{\varepsilon = 10^{-4}}$ -HEZ TARTOZÓ N KÜSZÖBINDEX?

$\boxed{a_n = \frac{n}{2n+1}}$ $\boxed{A = \frac{1}{2}}$ $a_n - A = \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} =$

$=$ KÖZÖS NEVEZŐ $= \frac{n}{2n+1} - \frac{n+\frac{1}{2}}{2n+1} =$

$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{2n+1} = \frac{-1}{4n+2}$, TEHÁT $\boxed{|a_n - A| = \frac{1}{4n+2}}$

KELL: $|a_n - A| \leq \varepsilon = 10^{-4}$, AZAZ $\frac{1}{4n+2} \leq \frac{1}{10^4}$

AZAZ $\boxed{10^4 \leq 4n+2}$, AZAZ $\boxed{2499.5 \leq n}$

MIVEL AZ N KÜSZÖBINDEX EGÉSZ SZÁM KELL, HOGY LEGYEN, ÍGY $\boxed{N = 2500}$, MERT HA $\boxed{2500 \leq n}$ AKKOR $|a_n - A| \leq \varepsilon$ ✓

TÉTEL: MONOTON NÖVŐ ÉS FELÜLRŐL KORLÁTOS SOROZAT KONVERGENS.

AZAZ: HA $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots \leq K$

AKKOR $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = A}$, AHOL A AZ $\{a_n\}$ SOROZAT LEGKISEBB FELSŐ KORLÁTJA.

(HASONLÓAN: CSÖKKENŐ & ALULRÓL KORL. $\Rightarrow$ KONV.)

EGY SOROZAT, AMI NEM KONVERGENS:

$$\boxed{a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+2}{n}}$$

PÁROS TAGOK 1-HEZ, PÁRATLAN TAGOK (−1)-HEZ KONVERGÁLNAK

$\boxed{\text{NEM KONVERGENS}} = \boxed{\text{DIVERGENS}}$

EGY KONVERGENS SOROZATNAK CSAK EGY HATÁRÉRTÉKE VAN.

<u>DEF:</u> $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty}$, HA BÁRMILYEN NAGY K-HOZ VAN OLYAN N, HOGY MINDEN $n \geq N$-RE $\boxed{a_n \geq K}$

<u>HÍRES SOROZATOK LIMESZEI:</u>

$\boxed{\lim_{n\to\infty} n = +\infty}$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty}$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty}$

ÁLTALÁBAN: $\boxed{\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty}$, HA $\boxed{\alpha > 0}$

$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0}$ ÁLT: $\boxed{\lim_{n\to\infty} n^\alpha = 0}$ HA $\boxed{\alpha < 0}$

$\boxed{\alpha = -1}$ $\boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} b^n = \begin{cases} +\infty & \text{HA } b > 1 \\ 1 & \text{HA } b = 1 \\ 0 & \text{HA } |b| < 1 \end{cases}$$

HA $\boxed{b \leq -1}$, AKKOR AZ $\boxed{a_n = b^n}$ SOROZAT DIVERGENS.

PL: $\boxed{b = -2}$: $\underset{a_0}{1}, \underset{a_1}{-2}, \underset{a_2}{4}, \underset{a_3}{-8}, 16, -32, 64, \ldots$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n! = +\infty} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} n^n = +\infty} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1}$$

$n^{1/n} = \sqrt[n]{n}$, $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$ ← BIZ KÉSŐBB.

$$\boxed{\ln(n) \ll \underset{\boxed{\alpha > 0}}{n^\alpha} \ll \underset{\boxed{b > 1}}{b^n} \ll n! \ll n^n}$$

$\boxed{\ll}$ JELENTÉSE: $a_n \ll b_n$, HA $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0}$

TEHÁT PL:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0} \quad \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0}$$

EGY BIZONYÍTÁS: MIÉRT IGAZ, HOGY $\frac{100^n}{n!} \to 0$?

$\boxed{a_{100} = \frac{100^{100}}{100!}}$ $\boxed{a_{101} = a_{100} \cdot \frac{100}{101}}$ $\boxed{a_{102} = a_{100} \cdot \frac{100}{101} \cdot \frac{100}{102}}$

$\boxed{a_{102} \leq a_{100} \cdot \left(\frac{100}{101}\right)^2}$ $\boxed{a_{103} \leq a_{100} \cdot \left(\frac{100}{101}\right)^3}$ STB

$$\lim_{n\to\infty} a_{100} \cdot \left(\frac{100}{101}\right)^n = 0 \quad \checkmark$$

MÉG EGY BIZ: AZ $\boxed{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ SOROZAT KONVERGENS

BEBIZONYÍTJUK, HOGY

(a) a_n MONOTON NÖVŐ (b) FELÜLRŐL KORLÁTOS: $\boxed{a_n \leq 3}$ MINDEN n-RE

ÉS EKKOR A 24. OLDAL ALJÁN KIMONDOTT TÉTEL MIATT KONVERGENS LESZ $\{a_n\}$.

BIZ: SZÜKSÉG LESZ HOZZÁ

BINOMIÁLIS TÉTEL:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2!}$$

(a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ MIÉRT?

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2! \cdot n^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3! \cdot n^3} + \ldots =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots = A$$

<u>HASONLÓAN:</u> $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} =$

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots = B$$

B ÖSSZEG TAGONKÉNT NAGYOBB AZ A ÖSSZEGNÉL (ÉS 1-EL TÖBB TAGJA VAN)

TEHÁT $A < B$

(b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$ MIÉRT?

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$

$$\leq 1+1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots}_{=1} = 3$$

<u>DEF</u>: A $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ SZÁMOT e-VEL JELÖLJÜK.

$\boxed{e \approx 2.71}$ TOVÁBBÁ:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^2} \qquad \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x}$$

<u>JOLLY JOKER</u>: HA $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = c}$

AKKOR $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+a_n\right)^{b_n} = e^c}$

29. OLDAL

PL: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-4}\right)^{5n+2} = ?$

$$\frac{n+3}{n-4} = \frac{n-4+7}{n-4} = 1+\frac{7}{n-4} \quad , \quad \boxed{a_n = \frac{7}{n-4}}$$

$$\boxed{b_n = 5n+2} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{35n+14}{n-4} = 35$$

TEHÁT $? = e^{35}$

LIMESZEK TULAJDONSÁGAI:

HA $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = A}$ ÉS $\boxed{\lim_{n\to\infty} b_n = B}$ ÉS $\boxed{c_n = a_n + b_n}$

AKKOR $\boxed{\lim_{n\to\infty} c_n = A+B}$. UGYANEZ RÖVIDEBBEN:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}} \leftarrow \text{HA } \boxed{\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)} \leftarrow @$$

PL: VEZESSÜK LE AZT, HOGY $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$ $\leftarrow$ ☺

ABBÓL, HOGY $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0}$ $\leftarrow \circledast$

MEGOLDÁS: $\boxed{a_n := \sqrt[n]{n} = n^{1/n}}$

$$\ln(a_n) = \ln\left(n^{1/n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \ln(n) = \frac{\ln(n)}{n}$$

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \overset{@}{=\!=} \lim_{n\to\infty} \ln(a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} \overset{\circledast}{=\!=} 0$$

$$\left.\begin{aligned} \ln\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) &= 0 \\ \ln(1) &= 0 \end{aligned}\right\} \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1} \Rightarrow ☺ \checkmark$$