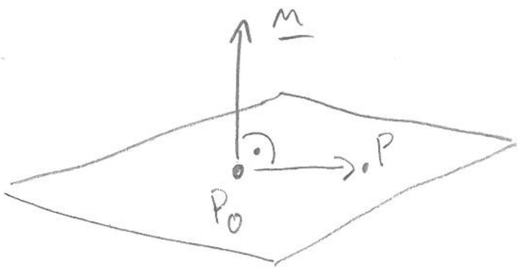
$$\frac{(2+t)-1}{-2} \overset{?}{=} \frac{(1-t)-2}{2} \overset{!}{=} \frac{(-1-2t)-1}{4}$$

$$\frac{1+t}{-2} \overset{\checkmark}{=} \frac{-1-t}{2} \overset{\checkmark}{=} \frac{-2-2t}{4}$$

IGEN, UGYANAZ AZ EGYENES

SÍK NORMÁLVEKTOROS EGYENLETE:



A $P(x,y,z)$ PONT RAJTA VAN AZON A SÍKON, AMI ÁTMEGY A $P_0(x_0,y_0,z_0)$ PONTON ÉS MERŐLEGES AZ $\underline{n}=(A,B,C)$ VEKTORRA,

HA $\boxed{\underline{n} \perp \overrightarrow{P_0P}}$, AZAZ $\boxed{(A,B,C) \perp (x-x_0, y-y_0, z-z_0)}$

$\hookrightarrow \underline{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ $\quad \hookrightarrow \boxed{A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0}$

ÁTRENDEZVE: $\boxed{A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z = \underbrace{Ax_0 + By_0 + C\cdot z_0}_{D}}$

PL: EGYENES ÉS SÍK METSZÉSPONTJA:

EGYENES:

$$① \quad \boxed{\begin{aligned} x &= 0+0\cdot t \\ y &= 2+t \\ z &= 1+2t \end{aligned}}$$

SÍK:

$$② \quad \boxed{1\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z = 1}$$

METSZÉSPONT:

KERESSÜNK EGY OLYAN t SKALÁRT, HOGY ① KIELÉGÍTI ② EGYENLETÉT!

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 2+t \\ z &= 1+2t \end{aligned}} \quad (1)$$

$$\boxed{x+y=1} \quad (2)$$

$$\boxed{\underbrace{0}_{x} + \underbrace{(2+t)}_{y} = 1}$$

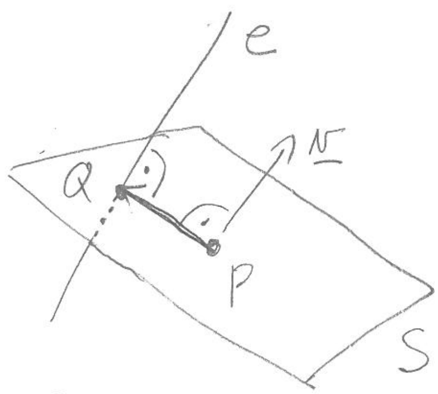
$$\boxed{t=-1}$$, TEHÁT

METSZÉSPONT: $P(x,y,z)$, AHOL EZT A t ÉRTÉKET HELYETTESÍTJÜK (1)-BE: $P(0,1,-1)$

PONT ÉS EGYENES TÁVOLSÁGA:

$P(1,1,5)$
$P(x_0,y_0,z_0)$

$$e: \boxed{\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 3-t \\ z &= 2t \end{aligned}}$$



MEGOLDÁS: e IRÁNYVEKTORA: $(1,-1,2)=\underline{v}$

HA Q AZ e EGYENESEN LEVŐ PONTOK KÖZÜL A P PONTHOZ LEGKÖZELEBBI, AKKOR $\boxed{\overrightarrow{PQ} \perp \underline{v}}$, TEHÁT Q AZ e EGYENES ÉS AZ S SÍK KÖZÖS PONTJA, AHOL S TARTALMAZZA A P PONTOT ÉS A NORMÁLVEKTORA $\underline{v}$

S SÍK: $v_1\cdot(x-x_0)+v_2\cdot(y-y_0)+v_3\cdot(z-z_0)=0$

$$1\cdot(x-1)+(-1)\cdot(y-1)+2\cdot(z-5)=0$$

KELL t, AMIRE TELJESÜL:

$$1\cdot\left(\left((1+t)-1\right)+(-1)\cdot\left((3-t)-1\right)+2\cdot(2t-5)\right)=0$$

$$t \quad -(2-t)+4t-10=0$$

$$6t-12=0 \longrightarrow \boxed{t=2}$$

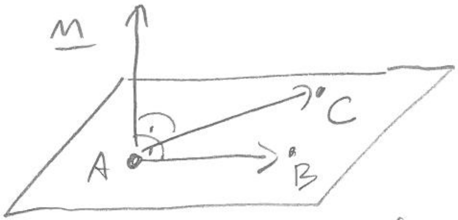
$$e: \boxed{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=3-t \\ z=2t \end{array}}$$

$$Q(3,1,4) \Rightarrow d=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

$$P(1,1,5)$$

HÁROM ADOTT PONTON ÁTFEKTETETT SÍK:

$A(1,1,1) \quad B(-2,0,3) \quad C(-1,1,2)$



A SÍK NORMÁLVEKTORA $\underline{n}$:

<u>KELL</u>: $\underline{n}\perp\overrightarrow{AB}$, $\underline{n}\perp\overrightarrow{AC}$

LEGYEN HÁT $\boxed{\underline{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3,-1,2)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,0,1)\end{array}}$$

$$\underline{n}=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\left((-1)\cdot 1-2\cdot 0\right)\cdot\underline{i}+\left(2\cdot(-2)-(-3)\cdot 1\right)\cdot\underline{j}+$$
$$+\left((-3)\cdot 0-(-1)\cdot(-2)\right)\cdot\underline{k}=(-1,-1,-2)$$

A SÍK ÁTMEGY AZ $A(1,1,1)$ PONTON:

$$\boxed{\text{SÍK EGYENLETE: } -(x-1)-(y-1)-2\cdot(z-1)=0}$$

KITÉRŐ EGYENESEK TÁVOLSÁGA:

$$e_1: \frac{-x-5}{8} = \frac{y-7}{10} = \frac{z-10}{6}$$

$$e_2: \frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-15}{4}$$

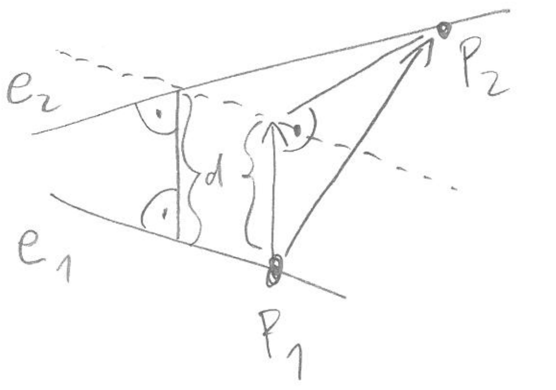
MEGOLDÁS: $e_1: \boxed{\begin{aligned} x &= -5-8t \\ y &= 7+10t \\ z &= 10+6t \end{aligned}}$ $e_2: \boxed{\begin{aligned} x &= 5+3t \\ y &= -3+5t \\ z &= 15+4t \end{aligned}}$

e_1 IRÁNYVEKTORA: $\underline{v}_1 = (-8, 10, 6)$

e_1 ÁTMEGY A $P_1(-5, 7, 10)$ PONTON

e_2 IRÁNYVEKTORA: $\underline{v}_2 = (3, 5, 4)$

e_2 ÁTMEGY A $P_2(5, -3, 15)$ PONTON



$\boxed{\underline{m} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2} \Rightarrow \boxed{\underline{m} \perp \underline{v}_1,\ \underline{m} \perp \underline{v}_2}$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ VETÜLETE $\underline{m}$ EGYENESÉRE PONT OLYAN HOSSZÚ, MINT e_1 ÉS e_2 TÁVOLSÁGA!

$$\underline{m} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -8 & 10 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (10, 50, -70) = 10 \cdot (1, 5, -7)$$

$\underline{m}$ EGYENESE UGYANAZ, MINT $(1, 5, -7)$ EGYENESE

18. OLDAL

$P_1(-5, 7, 10)$, $P_2(5, -3, 15)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (10, -10, 5) = 5\cdot(2, -2, 1) = \underline{a}$$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ VETÜLETE $(1, 5, -7) = \underline{b}$ EGYENESÉRE:

(LÁSD 12. OLDAL): $\left(\dfrac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\underline{b}\cdot\underline{b}}\right)\cdot\underline{b} =$

$$= \frac{5\cdot(2\cdot 1 + (-2)\cdot 5 + 1\cdot(-7))}{1^2 + 5^2 + (-7)^2}\cdot\underline{b} = 5\cdot\frac{-15}{75}\cdot\underline{b} = -\underline{b}$$

TEHÁT AZ EGYENESEK TÁVOLSÁGA =

$$= d = |-\underline{b}| = |\underline{b}| = \sqrt{1^2+5^2+(-7)^2} = \sqrt{75}$$

ZH FELADAT VOLT:

$$e: \boxed{\begin{aligned} x &= 4+2t \\ y &= 1-t \\ z &= 5+t \end{aligned}}$$

HATÁROZZA MEG AZ e EGYENES $x+y+z=0$ SÍKRA VETT e_p VETÜLETÉT! (A VETÜLET IS EGY EGYENES)

MEGOLDÁS: MEG KELL TALÁLNUNK e_p EGY P_0 PONTJÁT ÉS $\underline{w}$ IRÁNYVEKTORÁT.

P_0 LEGYEN A SÍK ÉS e METSZÉSPONTJA:

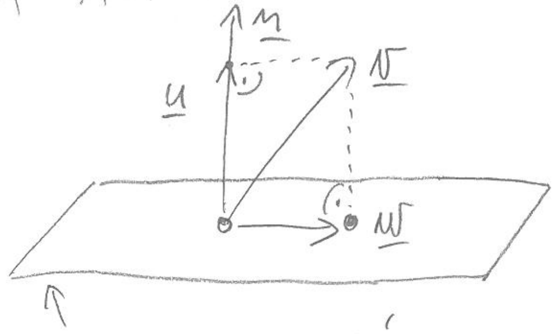
$(4+2t)+(1-t)+(5+t) = 0 \Rightarrow 10+2t=0 \Rightarrow \boxed{t=-5}$

$\Rightarrow P_0(-6, 6, 0)$

e_p EGYENES $\underline{w}$ IRÁNYA PEDIG AZ e EGYENES $\underline{v}$ IRÁNYÁNAK AZ $x+y+z=0$ SÍKRA VETT VETÜLETE.

e IRÁNYVEKTORA: $\underline{v} = (2, -1, 1)$

A SÍK NORMÁLVEKTORA: $\underline{m} = (1, 1, 1)$



$x+y+z=0$ SÍK

JELÖLJÜK $\underline{u}$-VAL A $\underline{v}$ VEKTOR $\underline{m}$-RE VETT VETÜLETÉT.

EKKOR $\boxed{\underline{v} = \underline{w} + \underline{u}}$, $\underline{u}$ PÁRHUZAMOS $\underline{m}$-EL, $\underline{w}$ MERŐLEGES $\underline{m}$-RE

LÁSD 12. OLDAL:

$$\underline{u} = \left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{m}}{\underline{m}\cdot\underline{m}}\right)\cdot\underline{m} = \frac{2\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 1}{1^2+1^2+1^2}\cdot\underline{m} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\boxed{\underline{w} = \underline{v} - \underline{u}} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$$ ← EZ LESZ e_p IRÁNYVEKTORA.

$$e_p: \boxed{\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\underline{w}}: \boxed{\begin{aligned} x &= -6 + \tfrac{4}{3}t \\ y &= 6 - \tfrac{5}{3}t \\ z &= 0 + \tfrac{1}{3}t \end{aligned}}$$

SOROZATOK: SZÁMOK VÉGTELEN LISTÁJA

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$\boxed{a_n = \frac{1}{n}}$: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ...

PL.: $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots\right\}$ $\boxed{a_n = ?}$

$\boxed{a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}}$, AHOL $n \geq 1$: $\left\{\frac{(-1)^n}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

VAGY: $\boxed{a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}}$, AHOL $n \geq 0$: $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}\right\}_{n=0}^{\infty}$

$a_0 = \frac{(-1)^1}{2\cdot 0+3} = -\frac{1}{3}$ $a_1 = \frac{(-1)^2}{2\cdot 1+3} = \frac{1}{5}$, STB.

MINDKÉT REPREZENTÁCIÓ OK!

DEF: AZ $\{a_n\}$ SOROZAT FELÜLRŐL KORLÁTOS,

HA VAN OLYAN K SZÁM, HOGY

MINDEN n-RE $\boxed{a_n \leq K}$

(HASONLÓAN: ALULRÓL KORLÁTOS)

$\{a_n\}$ KORLÁTOS, HA ALULRÓL ÉS FELÜLRŐL IS KORLÁTOS.

DEF: AZ $\{a_n\}$ SOROZAT MONOTON NÖVŐ, HA $\boxed{a_n \le a_{n+1}}$ MINDEN n-RE

(HASONLÓAN: MONOTON CSÖKKENŐ)

PL: FIBONACCI SOROZAT: REKURZÍV DEF.

$\boxed{a_1 = 1}$ $\boxed{a_2 = 1}$ ÉS $\boxed{a_{n+2} = a_n + a_{n+1}}$ HA $\boxed{n \ge 1}$

$a_3 = a_1 + a_2 = 2$ $a_4 = a_2 + a_3 = 1+2 = 3$, $a_5 = 5$

$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$

FIBONACCI SOROZAT MONOTON NÖVŐ, ALULRÓL KORLÁTOS, FELÜLRŐL NEM

PL: $\boxed{a_n = \frac{n}{n+1}}$ LÁSSUK BE, HOGY MON. NÖVŐ!

$\boxed{a_n \overset{?}{\le} a_{n+1}} \iff \boxed{\frac{n}{n+1} \overset{?}{\le} \frac{n+1}{n+2}} \iff \boxed{n \cdot (n+2) \overset{?}{\le} (n+1)^2}$

$\iff \boxed{n^2 + 2n \overset{?}{\le} n^2 + 2n + 1}$ ✓✓ NÖVŐ ✓

DEF: AZ $\{a_n\}$ SOROZAT HATÁRÉRTÉKE AZ A SZÁM, HA MINDEN $\varepsilon > 0$ - HOZ LEHET TALÁLNI OLYAN N - ET, HOGY $n \geq N$ ESETÉN $|a_n - A| < \varepsilon$.

JELÖLÉS: $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = A}$ $\boxed{a_n \to A}$

$\{a_n\}$ KONVERGENS $\Longleftrightarrow$ VAN HATÁRÉRTÉKE

SZÓBAN: $\boxed{a_n \to A}$, HA A BÁRMILYEN KICSI ε SUGARÚ $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ KÖRNYEZETÉHEZ VAN OLYAN N KÜSZÖBINDEX, HOGY $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ MÁR MIND EBBEN AZ $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ KÖRNYEZETBEN VAN.

PL: $\boxed{a_n = \frac{n}{2n+1}}$ HOGY TALÁLJUK KI, HOGY MIHEZ KONVERGÁL?

HA $n = 10^6$, AKKOR $a_n = a_{10^6} = \frac{10^6}{2 \cdot 10^6 + 1} \approx \frac{1}{2}$

TEHÁT $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}}$ ÉS MI AZ $\boxed{\varepsilon = 10^{-4}}$ - HEZ TARTOZÓ N KÜSZÖBINDEX?