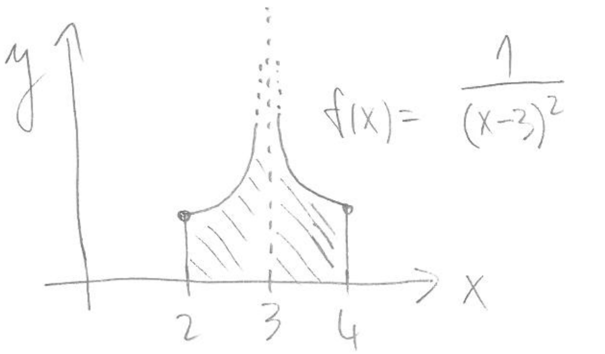
PL: $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = ?$ $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \frac{-1}{x-3} + C$

NAIV SZÁMOLÁS: $\displaystyle ? = \left[\frac{-1}{x-3}\right]_2^4 =$

$$= \frac{-1}{4-3} - \frac{-1}{2-3} = -1-1 = -2$$

GYANÚS: $\dfrac{1}{(x-3)^2} > 0$, TEHÁT $? > 0$ KELL, HOGY LEGYEN!

NAIV SZÁMOLÁS HIBÁJA: ? IMPROPRIUS!



$$? = \int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^4 f(x)\,dx \underset{\boxed{\text{SZIMMETRIA MIATT}}}{=} 2\cdot\int_2^3 f(x)\,dx =$$

$$= 2\cdot\lim_{b\to 3_-}\int_2^b f(x)\,dx = 2\cdot\lim_{b\to 3_-}\left[\frac{-1}{x-3}\right]_2^b =$$

$$= 2\cdot\lim_{b\to 3_-}\left(\frac{-1}{b-3} - \frac{-1}{2-3}\right) =$$

$$= 2\cdot\lim_{b\to 3_-}\left(\frac{1}{3-b} - 1\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{0} - 1\right) = 2\cdot(\infty - 1) =$$

$$= +\infty$$

TEHÁT ? DIVERGENS!

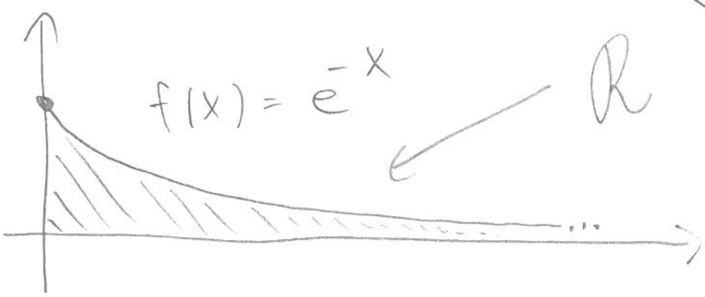
b BALRÓL KONVERGÁL 3-HOZ

170. OLDAL

PL: LEGYEN $\mathcal{R}$ A KOORDINÁTA-TENGELYEK ÉS AZ $y = e^{-x}$ GÖRBE ÁLTAL HATÁROLT SÍKIDOM. SZÁMOLJA KI $\mathcal{R}$ SÚLYPONTJÁNAK KOORDINÁTÁIT!

LÁSD 162. OLDAL

MEGO:



$$T = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b} - (-e^{-0})\right) = 1 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(e^{-x}\right)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-2x}\,dx =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x}\right]_0^b = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2\cdot\infty} + \frac{1}{2} \cdot e^{-2\cdot 0}\right) = 1/4$$

$$M_y = \int_0^\infty x \cdot e^{-x}\,dx = \text{PARCIÁLIS INT, LÁSD 126. OLD}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-(x+1) \cdot e^{-x}\right]_0^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{-(b+1)}{e^b}}_{=0} + (0+1) \cdot e^{-0} = 1$$

MIVEL $(b+1) \ll e^b$ LÁSD 26. OLDAL

$$\boxed{S_x = \frac{M_y}{T} = 1} \qquad \boxed{S_y = \frac{M_x}{T} = \frac{1}{4}}$$

KÉRDÉS: IMPROPRIUS INTEGRÁL KONVERGENS VAGY DIVERGENS?

LÁSD 166. OLD.

NEM MINDIG KELL ANTIDERIVÁLNI AHHOZ, HOGY MEGVÁLASZOLJUK!
VAN OLYAN, HOGY ELÉG ÖSSZEHASONLÍTANI ISMERT IMPROPRIUS INTEGRÁLOKKAL!

TÉNY: HA $-\infty \leq a < b \leq \infty$ ÉS

$\boxed{f(x) \leq g(x)}$ MINDEN $a \leq x \leq b$ ESETÉN AKKOR $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$

TEHÁT HA $\int_a^b g(x)\,dx < +\infty$, AKKOR $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$

AVAGY HA $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$, AKKOR $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$

VIGYÁZAT: HA $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$, ATTÓL MÉG LEHET $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$, ÉS HA $\int_a^b f(x)\,dx < +\infty$, ATTÓL MÉG LEHET $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$!

PL: $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$ KONVERGENS VAGY DIVERGENS?

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+x^2}$, LEGYEN $g(x)=\frac{1}{x^2}$

EKKOR $f(x)\le g(x)$ MINDEN $1\le x$-RE

TEHÁT $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$ KONVERGENS!

VÍZSZINTES $p=2$
$p>1$ LÁSD 166. OLD

MIÉRT $\sqrt{x}$-ET DOBTUK EL,
MIÉRT NEM x^2-ET?
MIVEL $\boxed{\sqrt{x} \ll x^2}$ AHOGY $x\to\infty$, A DOMINÁNS
TAGOT TARTOTTUK MEG.

PL: $\int_0^1 \frac{1}{x+x^2}\,dx$ KONV. VAGY DIV.?

HA $x\to 0$, AKKOR $\boxed{x^2 \ll x}$, TEHÁT MOST x
A DOMINÁNS TAG!

$f(x)=\frac{1}{x+x^2}$, LEGYEN $g(x)=\frac{1}{x+x}$

$\boxed{0<x<1} \Rightarrow \boxed{x^2<x} \Rightarrow \boxed{f(x)\ge g(x)}$, ÍGY

$\int_0^1 \frac{1}{x+x^2}\,dx \ge \int_0^1 \frac{1}{x+x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

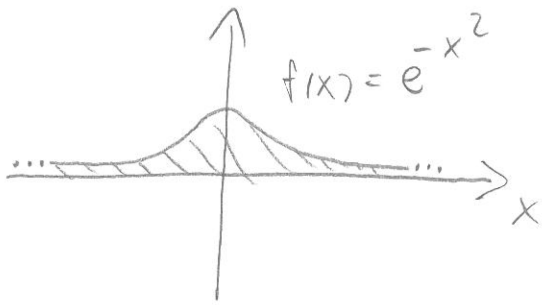
FÜGGŐLEGES $p=1$
LÁSD 167. OLDAL

TEHÁT DIVERGENS!

PL: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ **KONV.** VAGY **DIV.** ?

MEGO: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\cdot\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$

↑ SZIMMETRIA



TEHÁT A KÉRDÉS: $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ **KONV** VAGY **DIV**?

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx}_{<+\infty} + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

TEHÁT A KÉRDÉS: $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ **KONV** VAGY **DIV**?

$$\boxed{x \geq 1} \Rightarrow \boxed{x \leq x^2} \Rightarrow \boxed{e^{-x^2} \leq e^{-x}} \Rightarrow$$

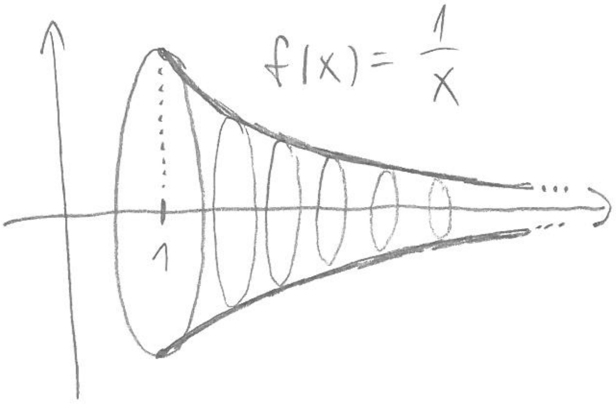
$$\int_{1}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \leq \int_{1}^{\infty} e^{-x}\,dx < +\infty$$

LÁSD 171. OLDAL

VÁLASZ: **KONVERGENS**!

PL: TORRICELLI TROMBITÁJA: FORGÁSTEST:

TÉRFOGATA: LÁSD 159. OLDAL:



$$V = \pi\cdot\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \boxed{\text{LÁSD 165}}$$

$$= \pi\cdot 1 < +\infty$$

VISZONT: A TROMBITA FELSZÍNE (162. OLDAL):

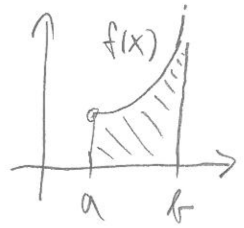
$$F = 2\pi \cdot \int_1^\infty f(x)\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = $$

$\boxed{\text{VÍZSZÍNTES } p=1,\ 166.\ \text{OLD}}$

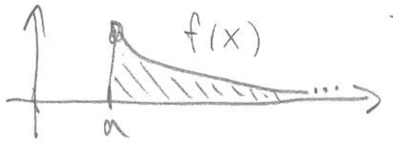
$$= 2\pi\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x}\cdot\sqrt{1+1/x^4}\,dx \geqslant 2\pi\cdot\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

VÉGES SOK FESTÉKET LEHET BELETÖLTENI, DE VÉGTELEN SOK FESTÉK KELL AHHOZ, HOGY LEFESSÜK A FELSZÍNÉT!

<u>LIMESZ-ÖSSZEHASONLÍTÓ</u> <u>KRITÉRIUM</u>:



<u>TÉTEL</u>: HA $\lim\limits_{x\to b-} f(x)/g(x) = 1$, AKKOR AZ $\int_a^b f(x)\,dx$ ÉS $\int_a^b g(x)\,dx$ IMPROPRIUS INTEGRÁLOK EGYSZERRE KONVERGENSEK / DIVERGENSEK.

($b = +\infty$ ESETÉN IS MŰKÖDIK: )

<u>PL</u>: (LÁSD 173. OLDAL): $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx$ KONV/DIV?

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}+x^2} \\ g(x) &= 1/x^2 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^{-3/2}} = 1,$$ TOVÁBBÁ

$\int_1^\infty g(x)\,dx < +\infty$ TEHÁT $\int_1^\infty f(x)\,dx < +\infty$ A LIMESZ-ÖSSZEHAS. KRIT. MIATT.

175. OLDAL

PL: (LÁSD 173. OLDAL): $\int_0^1 \frac{1}{x+x^2}\,dx$ KONV/DIV?

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{1}{x+x^2} \\ g(x) = 1/x \end{array}\right\} \lim_{x\to 0_+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{1+x} = 1$$

, TOVÁBBÁ

$\int_0^1 g(x)\,dx = +\infty$, TEHÁT $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$ A LIMESZ-ÖSSZEHASONLÍTÓ KRIT. MIATT.
