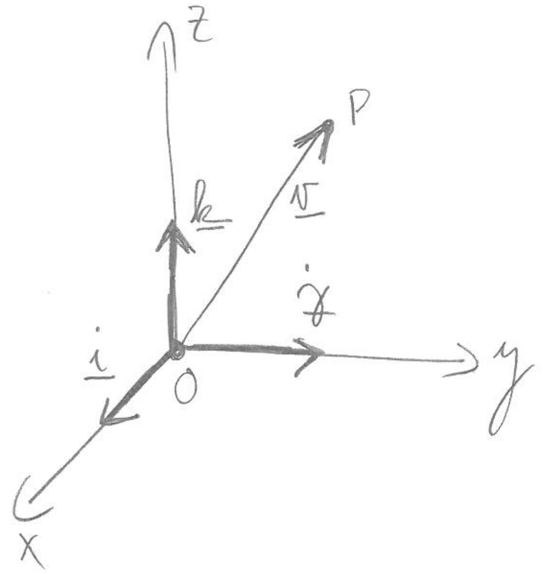
TÉRGEOMETRIA: 3 DIMENZIÓS



$\underline{i} = (1, 0, 0)$

$\underline{j} = (0, 1, 0)$

$\underline{k} = (0, 0, 1)$

KOORDINÁTA-IRÁNYÚ EGYSÉGVEKTOROK

$\underline{0} = (0, 0, 0)$

NULL-VEKTOR (ORIGÓ)

$$\overrightarrow{OP} = \underline{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j} + v_3 \cdot \underline{k}$$

HA $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, AKKOR

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1):$$

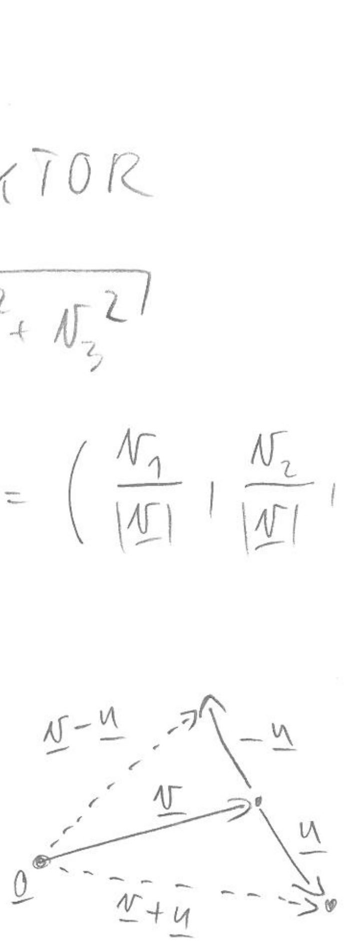
P_1-BŐL P_2-BE MUTATÓ VEKTOR

VEKTOR HOSSZA: $|\underline{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

$\underline{v}$ IRÁNYÚ EGYSÉG-VEKTOR: $\dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \left(\dfrac{v_1}{|\underline{v}|}, \dfrac{v_2}{|\underline{v}|}, \dfrac{v_3}{|\underline{v}|}\right)$

ÖSSZEADÁS, KIVONÁS:

$\underline{v} \pm \underline{u} = (v_1 \pm u_1, v_2 \pm u_2, v_3 \pm u_3)$:

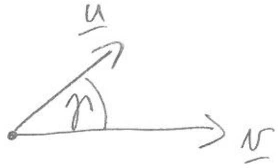


SKALÁRIS SZORZAT:

$\underline{u}$ ÉS $\underline{v}$ VEKTOROK SKALÁRIS SZORZATA $\underline{u} \cdot \underline{v}$

$\underline{u} \cdot \underline{v}$ EGY SZÁM (MÁS NÉVEN „SKALÁR")

$$\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}$$



SZEMLÉLETES JELENTÉS: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos(\gamma)$

$\underline{u}$, $\underline{v}$ ÁLTAL BEZÁRT SZÖG γ KOSZINUSZA:

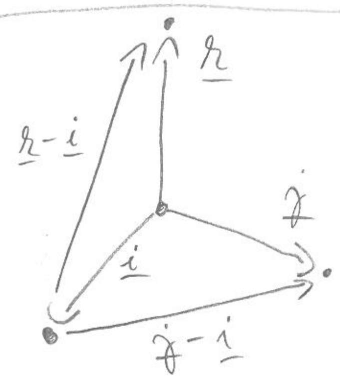
$$\boxed{\cos(\gamma) = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}}$$

$\underline{u}$ ÉS $\underline{v}$ MERŐLEGESEK, HA $\gamma = \frac{\pi}{2}$, AZAZ $\cos(\gamma) = 0$, AZAZ HA $\boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = 0}$

JELÖLÉS:

$\underline{u} \perp \underline{v} \iff \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$

PL: MI $\underline{j} - \underline{i}$ ÉS $\underline{k} - \underline{i}$ SZÖGE?



$\underline{j} - \underline{i} = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0) = \underline{u}$

$\underline{k} - \underline{i} = (-1,0,1) = \underline{v}$

$(\underline{j} - \underline{i}) \cdot (\underline{k} - \underline{i}) = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1$

$|\underline{j} - \underline{i}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \quad |\underline{k} - \underline{i}| = \sqrt{2}$

$\cos(\gamma) = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{\pi}{3}}$ $\leftarrow 60°$

MEGJ: $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$, $\underline{u} \cdot (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \underline{u} \cdot \underline{v}_1 + \underline{u} \cdot \underline{v}_2$

$\underline{u} \cdot \underline{u} = |\underline{u}|^2$

VEKTORI SZORZAT:

$\underline{u}$ ÉS $\underline{v}$ VEKTOROK VEKTORI SZORZATA $\underline{u} \times \underline{v}$

$\underline{u} \times \underline{v} = \underline{w}$ EGY VEKTOR.

HA $\underline{u} = u_1 \cdot \underline{i} + u_2 \cdot \underline{j} + u_3 \cdot \underline{k}$, $\underline{v} = v_1 \cdot \underline{i} + v_2 \cdot \underline{j} + v_3 \cdot \underline{k}$,

AKKOR

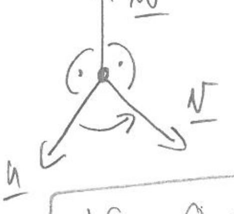
$$\boxed{\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2) \cdot \underline{i} - (u_1 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_1) \cdot \underline{j} + (u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1) \cdot \underline{k}}$$

ÍGY LEHET MEGJEGYEZNI:

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \end{array}$$
$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} & \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right|$$

SZEMLÉLETES JELENTÉS: HA $\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$,

AKKOR $\underline{w} \perp \underline{u}$, $\underline{w} \perp \underline{v}$, JOBBKÉZ SZABÁLY:



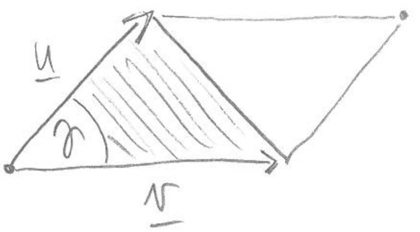
$\underline{w}$ HOSSZA: $|\underline{w}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin(\gamma)$

$\underline{u}$ ÉS $\underline{v}$ SZÖGE

TULAJDONSÁGOK: $\underline{u} \times \underline{v} = -(\underline{v} \times \underline{u})$

$\underline{v} \times \underline{v} = \underline{0}$ $\quad \underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$, $\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$, $\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$

ALKALMAZÁSA: $\quad T_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot |\underline{u} \times \underline{v}|$



PL: $\underline{a} = (-1, 0, 3) \quad \underline{b} = (1, 2, 1)$

MI AZ ÁLTALUK FESZÍTETT Δ TERÜLETE?

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0 \cdot 1 - 3 \cdot 2) \cdot \underline{i} + (3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) \cdot \underline{j} + (-1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) \cdot \underline{k} = (-6, 4, -2)$$

ELLENŐRZÉS:

$(\underline{a} \times \underline{b}) \perp \underline{a}$? $\quad (-6, 4, -2) \cdot (-1, 0, 3) = 6 + 0 - 6 = 0$ ✓

$(\underline{a} \times \underline{b}) \perp \underline{b}$? $\quad (-6, 4, -2) \cdot (1, 2, 1) = -6 + 8 - 2 = 0$ ✓

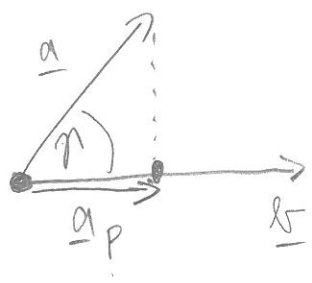
$\underline{a} \times \underline{b} = 2 \cdot (-3, 2, -1)$

$$T_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\underline{a} \times \underline{b}| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

PL: $\underline{a}=(-1,0,3) \quad \underline{b}=(1,2,1)$

MICSODA $\underline{a}$ VETÜLETE $\underline{b}$ EGYENESÉRE?

JELÖLJÜK A VETÜLETET $\underline{a}_p$-VEL (PROJEKCIÓ)



$$\boxed{\underline{a}_p=\left(\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\underline{b}\cdot\underline{b}}\right)\cdot\underline{b}}$$

MIÉRT?

$$\underline{a}_p=|\underline{a}_p|\cdot\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}=|\underline{a}|\cdot\cos(\gamma)\cdot\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|}\cdot\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}=$$

$$=\left(\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{b}|^2}\right)\cdot\underline{b}=\left(\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\underline{b}\cdot\underline{b}}\right)\cdot\underline{b}=\frac{(-1)\cdot 1+0\cdot 2+3\cdot 1}{1^2+2^2+1^2}\cdot\underline{b}=$$

$$=\frac{2}{6}\cdot\underline{b}=\frac{1}{3}\cdot(1,2,1)=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

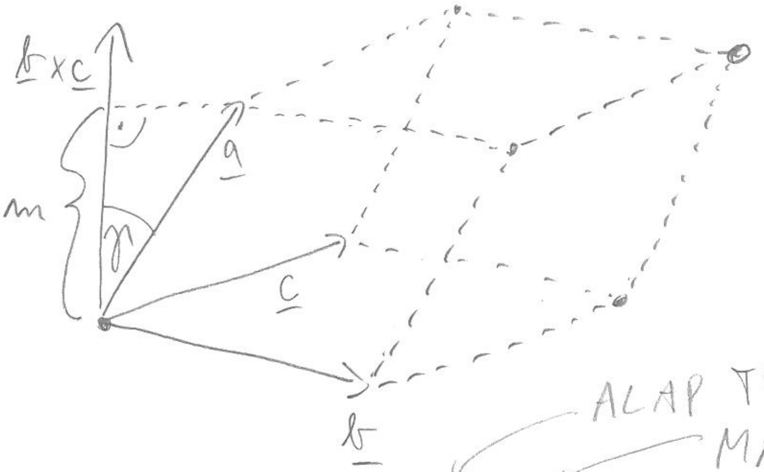
VEGYES SZORZAT:

$\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ VEKTOROK VEGYES SZORZATA $(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})$

$(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})$ EGY SZÁM.

$$\boxed{(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})=\underline{a}\cdot(\underline{b}\times\underline{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}}$$

VEGYES SZORZAT HASZNA:



$|(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})| = V =$ PARALELEPIPEDON TÉRFOGATA $= (\underline{b}\times\underline{c})\cdot\underline{a}$

ALAP TERÜLETE

MAGASSÁG

<u>MIÉRT?</u> $V = T\cdot m$

$\boxed{T = |\underline{b}\times\underline{c}|}$ $\boxed{m = |\underline{a}|\cdot\cos(\gamma)}$ $T\cdot m = \underbrace{|\underline{b}\times\underline{c}|\cdot|\underline{a}|\cdot\cos(\gamma)}_{=(\underline{b}\times\underline{c})\cdot\underline{a}}$

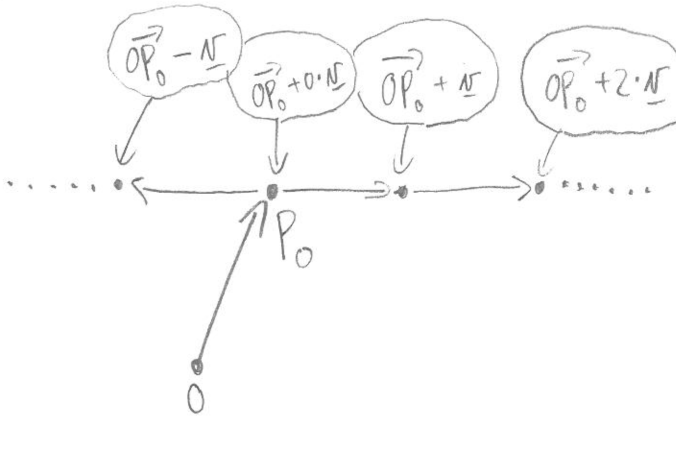
(HISZEN $\underline{b}\times\underline{c}$ MERŐLEGES $\underline{b}$ ÉS $\underline{c}$ SÍKJÁRA)

(AZÉRT KELL ABSZOLÚT ÉRTÉKET VENNI, MERT $(\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c})$ LEHET NEGATÍV IS)

EGYENESEK ÉS <u>SÍKOK</u> <u>A</u> <u>3D</u> <u>TÉRBEN</u>:

ADOTT $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ÉS $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

A P_0 PONTON ÁTMENŐ $\underline{v}$ IRÁNYÚ EGYENES AZOKBÓL A $P(x, y, z)$ PONTOKBÓL ÁLL, AMIKHEZ VAN OLYAN t SKALÁR, HOGY $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\underline{v}$



EGYENES PARAMÉTERES EGYENLETRENDSZERE:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + t\cdot v_1 \\ y &= y_0 + t\cdot v_2 \\ z &= z_0 + t\cdot v_3 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot v_1 \\ y &= y_0 + t \cdot v_2 \\ z &= z_0 + t \cdot v_3 \end{aligned}} \iff \boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = t}$$

(HA $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, $v_3 \neq 0$)

TEHÁT: $P_0(x_0, y_0, z_0)$ PONTON ÁTMENŐ, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ IRÁNYÚ EGYENESEN RAJTA VAN A $P(x, y, z)$ PONT, HA $\boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{y - y_0}{v_3}}$ TELJESÜL.

EGYENES IMPLICIT EGYENLETE ↑

ÉS HA MONDJUK $v_3 = 0$? AKKOR AZ EGYENES PÁRHUZAMOS AZ (x, y) KOORDINÁTASÍKKAL.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot v_1 \\ y &= y_0 + t \cdot v_2 \\ z &= z_0 \end{aligned}}$$

← PARAMÉTERES

IMPLICIT →

$$\boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}, \quad z = z_0}$$

PL: UGYANAZT AZ EGYENEST ADJA-E MEG AZ

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 1 - t \\ z &= -1 - 2t \end{aligned}}$$

← PARAMÉTERES

ÉS A →

$$\boxed{\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 1}{4}}$$

← 1 IMPLICIT EGYENLET? ↑ 2

MEGOLDÁS: NÉZZÜK, HOGY KIELÉGÍTI-E 2 EGYENLETET AZ 1 FORMULÁVAL ADOTT (x, y, z) BÁRMILYEN t-RE?

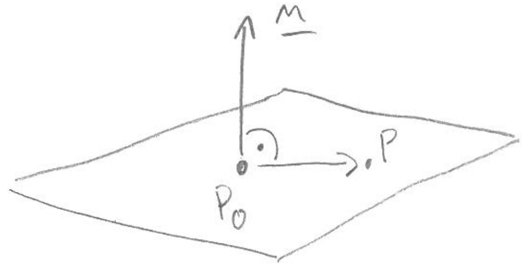
$$\frac{(2 + t) - 1}{-2} \overset{?}{=} \frac{(1 - t) - 2}{2} \overset{?}{=} \frac{(-1 - 2t) - 1}{4}$$

$$\frac{(2+t)-1}{-2} \overset{?}{=} \frac{(1-t)-2}{2} \overset{!}{=} \frac{(-1-2t)-1}{4}$$

$$\frac{1+t}{-2} \overset{\checkmark}{=} \frac{-1-t}{2} \overset{\checkmark}{=} \frac{-2-2t}{4}$$

IGEN, UGYANAZ AZ EGYENES

SÍK NORMÁLVEKTOROS EGYENLETE:



A $P(x,y,z)$ PONT RAJTA VAN AZON A SÍKON, AMI ÁTMEGY A $P_0(x_0,y_0,z_0)$ PONTON ÉS MERŐLEGES AZ $\underline{n}=(A,B,C)$ VEKTORRA,

HA $\boxed{\underline{n} \perp \overrightarrow{P_0P}}$, AZAZ $\boxed{(A,B,C) \perp (x-x_0, y-y_0, z-z_0)}$

$\hookrightarrow \underline{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ $\quad\hookrightarrow$ $\boxed{A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0}$

ÁTRENDEZVE: $\boxed{A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z = \underbrace{A x_0 + B y_0 + C\cdot z_0}_{D}}$

PL: EGYENES ÉS SÍK METSZÉSPONTJA:

EGYENES:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 0+0\cdot t \\ y &= 2+t \\ z &= 1+2t \end{aligned}}$$

(1)

SÍK:

$$\boxed{1\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z = 1}$$

(2)

METSZÉSPONT:

KERESSÜNK EGY OLYAN t SKALÁRT, HOGY (1) KIELÉGÍTI (2) EGYENLETÉT!