RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA PARCIÁLIS TÖRTEKRE BONTÁSSAL:

RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNY: $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ← POLINOMOK

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = ?$$

<u>STRATÉGIA</u>: BONTSUK FEL $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ -ET EGYSZERŰBB FÜGGVÉNYEK ÖSSZEGÉRE!

<u>EGYSZERŰ</u> <u>ESET</u>:

HA $\boxed{\deg(p(x)) < \deg(q(x))}$, AKKOR <u>FAKTORIZÁLJUK</u> $q(x)$-ET (AZAZ KERESSÜK MEG A GYÖKEIT):

<u>PL</u>: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = ?$

FAKTORIZÁCIÓ: $x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$

<u>ÁLL</u>: VAN OLYAN A, B, HOGY

$$\boxed{\frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}}$$

← KERESSÜK MEG A-T ÉS B-T!

SZOROZZUNK BE A KÖZÖS NEVEZŐVEL:

$$\boxed{1 = A\cdot(x+1) + B\cdot(x-1)}$$

← KELL: OLYAN A, B, HOGY EZ MINDEN x-RE TELJESÜL!

130. OLDAL

KELL: A, B, HOGY $1 \equiv A\cdot(x+1) + B\cdot(x-1)$

HELYETTESÍTSÜK BE A GYÖKÖKET: $\boxed{x_1 = 1,\ x_2 = -1}$

$\boxed{x_1 = 1}$: $1 = A\cdot(1+1) + B\cdot(1-1) = A\cdot 2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$

$\boxed{x_2 = -1}$: $1 = A\cdot(-1+1) + B\cdot(-1-1) = -2\cdot B \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}}$

TEHÁT $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{(x+1)\cdot(x-1)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1}$

ÍGY $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx =$

$= \dfrac{1}{2}\ln|x-1| - \dfrac{1}{2}\ln|x+1| + C$

ÁLTALÁBAN IS:

HA $\deg(p(x)) < \deg(q(x))$ ÉS HA $q(x)$-NEK NINCSENEK TÖBBSZÖRÖS GYÖKEI, AZAZ

$q(x) = x^n + \ldots = (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$

AHOL $x_1, \ldots, x_n$ MIND KÜLÖNBÖZŐEK, AKKOR VAN OLYAN $A_1, A_2, \ldots, A_n$, HOGY

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}$$

131. OLDAL

PL: $\int \frac{13x^2-2}{2x^3-3x^2-2x}\,dx = ?$ $\underbrace{deg(p(x))}_{2} < \underbrace{deg(q(x))}_{3}$

FAKTORIZÁLJUK A NEVEZŐT:

$2x^3-3x^2-2x = x\cdot(2x^2-3x-2)$

$2x^2-3x-2$ GYÖKEI:

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm 5}{4}$: $\boxed{x_1=2}$ $\boxed{x_2=-1/2}$

TEHÁT: $2x^2-3x-2 = 2\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

$= 2\cdot(x-2)\cdot(x+1/2)$

TEHÁT:

$q(x) = 2\cdot(x-0)\cdot(x-2)\cdot(x+1/2)$, ÍGY

$\frac{13x^2-2}{(x-0)\cdot(x-2)\cdot(x+1/2)} = \frac{A}{x-0} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1/2}$

$13x^2-2 = A\cdot(x-2)\cdot(x+1/2) + B\cdot x\cdot(x+1/2) + C\cdot x\cdot(x-2)$

$\boxed{A, B, C = ?}$ TRÜKK: HELYETTESÍTSÜK BE $q(x)$ GYÖKEIT!

$\boxed{x=0} \Rightarrow 13\cdot 0^2-2 = A\cdot(0-2)\cdot(0+1/2) + B\cdot 0\cdot(0+1/2) + C\cdot 0\cdot(0-2)$

$-2 = A\cdot(-1) + 0 + 0$

$\boxed{A=2}$

132. OLDAL

$\boxed{x=2}$:

$$13\cdot 2^2-2=A\cdot(2-2)\cdot(2+1/2)+B\cdot 2\cdot(2+1/2)+C\cdot 2\cdot(2-2)$$

$$50 = 0 + B\cdot 5 + 0$$

$$\boxed{B=10}$$

$\boxed{x=-1/2}$:

$$13\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2=A\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+B\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+$$
$$C\cdot(-1/2)\cdot\left(-\frac{1}{2}-2\right)$$

$$\frac{5}{4} = 0 + 0 + C\cdot 5/4$$

$$\boxed{C=1}$$

TEHÁT $\displaystyle\int\frac{p(x)}{q(x)}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int\left(\frac{2}{x}+\frac{10}{x-2}+\frac{1}{x+1/2}\right)dx=$

$$=\ln|x|+5\cdot\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x+1/2|+C$$

HA $\deg(p(x))<\deg(q(x))$ ÉS $q(x)$-NEK TÖBBSZÖRÖS GYÖKEI VANNAK: $(x-x_i)^m$, $m\geq 2$ ALAKÚ FAKTOR:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\ldots+\frac{A_{i,1}}{x-x_i}+\frac{A_{i,2}}{(x-x_i)^2}+\ldots+\frac{A_{i,m}}{(x-x_i)^m}+\ldots$$

133. OLDAL

PL: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^2+3}{x^3\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(2x+2)} = ?$ PARCIÁLIS TÖRTEKRE BONTÁSA ?

$$? = \frac{2x^2+3}{2\cdot x^3\cdot(x-1)\cdot(x+1)^2} =$$

$$= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{(x+1)^2}$$

PL: $\int \frac{2x+1}{x^3+2x^2+x}\,dx = ?$ $\quad \underbrace{\deg(p(x))}_{1} < \underbrace{\deg(q(x))}_{3}$

$$q(x) = x^3+2x^2+x = x\cdot(x^2+2x+1) = x\cdot(x+1)^2$$

$$\frac{2x+1}{x\cdot(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \qquad \boxed{A, B, C = ?}$$

$$2x+1 = A\cdot(x+1)^2 + B\cdot x\cdot(x+1) + C\cdot x$$

HELY. BE $q(x)$ GYÖKEIT:

$\boxed{x=0}$: $2\cdot 0+1 = A\cdot(0+1)^2 + B\cdot 0\cdot(0+1) + C\cdot 0 \Rightarrow \boxed{A=1}$

$\boxed{x=-1}$: $2\cdot(-1)+1 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot(-1) \Rightarrow \boxed{C=1}$

DE MI LEHET $B=?$

$$2x+1 = (x+1)^2 + B\cdot x\cdot(x+1) + x$$

134. OLDAL

$$2x+1=(x+1)^2+B\cdot x\cdot(x+1)+x$$

$$2x+1=x^2+2x+1+B\cdot(x^2+x)+x$$

$$-x^2-x=B\cdot(x^2+x) \implies \boxed{B=-1}$$

$$? = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=$$

$$=\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$$

ÉS HA $\deg(p(x)) \geq \deg(q(x))$?

EKKOR $\boxed{\dfrac{p(x)}{q(x)}=h(x)+\dfrac{m(x)}{q(x)}}$

AHOL:

$\deg(m)<\deg(q)$

$\deg(h)=\deg(p)-\deg(q)$

$\boxed{p(x)=h(x)\cdot q(x)+m(x)}$ ← POLINOM MARADÉKOS OSZTÁSA

OSZTANDÓ: $p(x)$

HÁNYADOS: $h(x)$

OSZTÓ: $q(x)$

MARADÉK: $m(x)$

(p, q, m, h MIND POLINOMOK)

135. OLDAL

KÖNNYŰ PÉLDA:

$p(x) = x^2 + 1 \qquad q(x) = x^2 - 1$

$\deg(p) = 2 \qquad \deg(q) = 2$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = ?$$

$$? = \int \frac{x^2-1+2}{x^2-1}\,dx = \int 1\,dx + 2\cdot\int \frac{1}{x^2-1}\,dx =$$

LÁSD 130-131. OLDAL

$$= x + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|\right) + C$$

$$p(x) = h(x)\cdot q(x) + m(x)$$

$$h(x) \equiv 1 \qquad m(x) \equiv 2$$

NEHÉZ PÉLDA:

$\boxed{p(x) = 4x^4 - 6x - 2}$ $\boxed{q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x}$

$\deg(p) = 4 \quad \deg(q) = 3$

$$
\begin{array}{l|l}
 & 2x+3 \\
\hline
2x^3-3x^2-2x & 4x^4-6x-2 \\
 & 4x^4-6x^3-4x^2 \\
\hline
 & 6x^3+4x^2-6x-2 \\
 & 6x^3-9x^2-6x \\
\hline
 & 13x^2-2
\end{array}
$$

ENNEK A POLINOMNAK A FOKA KISEBB $\deg(q(x))$-NÉL, TEHÁT LEÁLLHATUNK

A POLINOM-OSZTÁS VÉGEREDMÉNYE:

HÁNYADOS: $h(x) = 2x + 3$

MARADÉK: $m(x) = 13x^2 - 2$

TEHÁT

$$\int \frac{4x^4-6x-2}{2x^3-3x^2-2x}\,dx = \int (2x+3)\,dx + \int \frac{13x^2-2}{2x^3-3x^2-2x}\,dx$$

$$= x^2+3x+\ln|x|+5\cdot\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+1/2|+C$$

LÁSD 132–133. OLDAL

PL: $\int \frac{1}{e^x+e^{2x}}\,dx = ?$

SÚGÁS: HELYETTESÍTÉS:

$u=e^x$ | $dx=\frac{du}{e^x}=\frac{du}{u}$

$\frac{du}{dx}=e^x$ | $e^{2x}=u^2$

$$? = \int \frac{1}{u+u^2}\cdot\frac{1}{u}\,du = \int \frac{1}{u^2\cdot(u+1)}\,du = ☆$$

$$\frac{1}{u^2\cdot(u+1)} = \frac{A}{u^2}+\frac{B}{u}+\frac{C}{u+1} \leftarrow$$

TÖBBSZÖRÖS GYÖK, LÁSD 133. OLDAL

$$1 = A\cdot(u+1)+B\cdot u\cdot(u+1)+C\cdot u^2$$

$\boxed{u=0}$: $1 = A\cdot 1 + B\cdot 0 + C\cdot 0 \Rightarrow \boxed{A=1}$

$\boxed{u=-1}$: $1 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot(-1)^2 \Rightarrow \boxed{C=1}$

$1 = (u+1) + B\cdot u\cdot(u+1) + u^2 \Leftrightarrow \boxed{B\cdot(u^2+u) = -u^2-u}$ $\Rightarrow \boxed{B=-1}$

$$☆ = \int\left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}+\frac{1}{u+1}\right)du = \frac{-1}{u}-\ln|u|+\ln|u+1| =$$

$$= \frac{-1}{e^x}-\ln(e^x)+\ln(e^x+1) = -e^{-x}-x+\ln(e^x+1)+C$$

137. OLDAL

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS:

BEVEZETÉS: LÁSD 118–121. OLDAL.

$$\int x^2 \cdot \cos(x^3)\,dx = \boxed{\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3}du \end{array}}$$

$$= \int \underbrace{\cos(x^3)}_{\cos(u)} \cdot \underbrace{x^2 dx}_{\frac{1}{3}du} = \frac{1}{3}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{3}\sin(u) + C$$

$$= \frac{1}{3}\sin(x^3) + C$$

ÉS VALÓBAN: $\left(\frac{1}{3}\cdot\sin(x^3) + C\right)' = \frac{1}{3}\cdot\cos(x^3)\cdot 3x^2 =$

$$= x^2 \cdot \cos(x^3) \checkmark$$

$$\int x^3 \cdot \cos(x^2)\,dx = \boxed{\begin{array}{l} u = x^2 \\ \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{1}{2}du = x\,dx \end{array}}$$

$$= \int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x^2)}_{\cos(u)} \cdot \underbrace{x\,dx}_{\frac{1}{2}du} = \frac{1}{2}\int \underbrace{u}_{g} \cdot \underbrace{\cos(u)}_{f'}\,du =$$ PARCIÁLIS INTEGRÁLÁS

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{u}_{g}\cdot\underbrace{\sin(u)}_{f} - \int \underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{\sin(u)}_{f}\,du\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(u\cdot\sin(u) + \cos(u)\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\cdot\sin(x^2) + \cos(x^2)\right) + C$$

138. OLDAL