INTEGRÁLSZÁMÍTÁS:

ADOTT f: KELL F, HOGY $\boxed{F'(x) = f(x)}$ ★

ELNEVEZÉS: ★: F AZ f <u>ANTIDERIVÁLTJA</u>

★ F AZ f <u>PRIMITÍV</u> <u>FÜGGVÉNYE</u>

<u>DEF</u>: ADOTT f. AZON F-EK HALMAZÁT, AMIRE ★ TELJESÜL, f <u>HATÁROZATLAN</u> <u>INTEGRÁLJ</u>ÁNAK NEVEZZÜK ÉS

$$\boxed{\int f(x)\,dx}$$ -EL JELÖLJÜK.

(AZÉRT <u>HATÁROZATLAN</u>, MERT SOK OLYAN F VAN, AMIRE ★ TELJESÜL)

<u>PL</u>: $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$, TEHÁT $\sin(x)$ AZ PRIMITÍV FÜGGVÉNYE $\cos(x)$-NEK.
DE $\frac{d}{dx}(\sin(x) - 1) = \cos(x)$, ÍGY $\sin(x) - 1$ IS PRIMITÍV FÜGGVÉNYE $\cos(x)$-NEK. <u>SŐT</u>: BÁRMELY C-RE $\sin(x) + C$ IS PRIMITÍV FÜGGVÉNYE $\cos(x)$-NEK.

$\boxed{\text{114. OLDAL}}$

ÁLL: cos(X) BÁRMELYIK PRIMITÍV FÜGGVÉNYE sin(X)+C ALAKÚ, AZAZ

$$\int \cos(x)\,dx = \{\sin(x)+C,\ C\in\mathbb{R}\}$$

BIZ: HA $F'(x)=\cos(x)$, AKKOR

$$\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{F(x)-\sin(x)}_{G(x)}\Big)=\cos(x)-\cos(x)=0$$

TEHÁT $\boxed{G'(x)\equiv 0}$

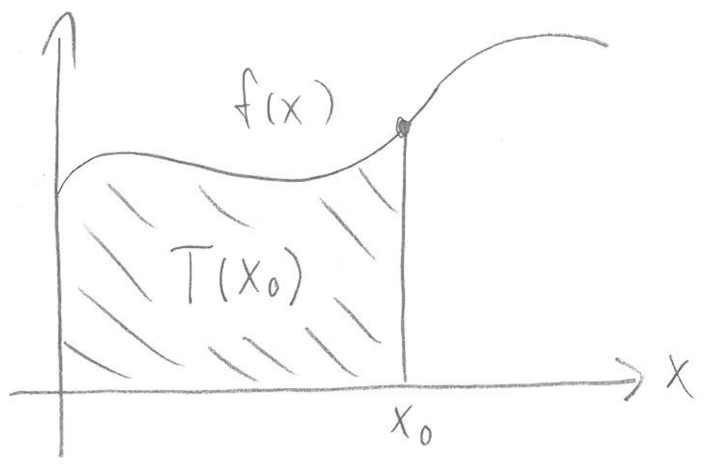
G GRAFIKONJÁNAK ÉRINTŐJE MINDEN X PONTBAN VÍZSZINTES $\Rightarrow$ G KONSTANS:

$$\boxed{G(x)\equiv C} \Rightarrow \boxed{F(x)-\sin(x)\equiv C} \Rightarrow \boxed{F(x)=\sin(x)+C}$$

ÁLTALÁBAN IS: HA $F'(x)=f(x)$, AKKOR

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$$

MIÉRT ÉRDEKES AZ INTEGRÁLÁS?

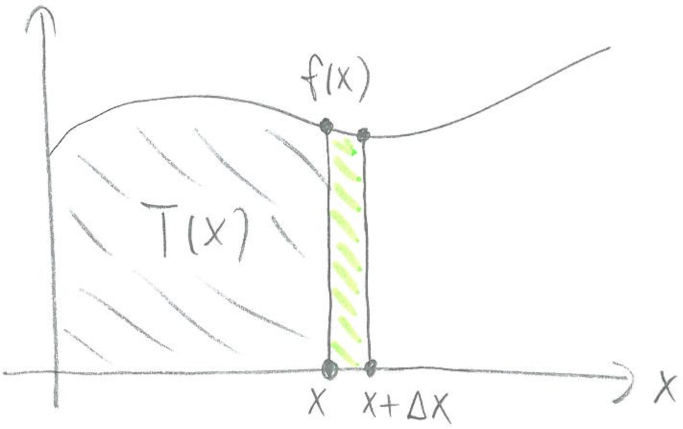


LEGYEN $T(x_0)$ AZ f GÖRBÉJE ALATTI TERÜLET 0-TÓL x_0-IG. ADOTT f, MI LEHET A TERÜLET?

115. OLDAL

ÁLLÍTÁS: $\boxed{T'(x) = f(x)}$

BIZ:



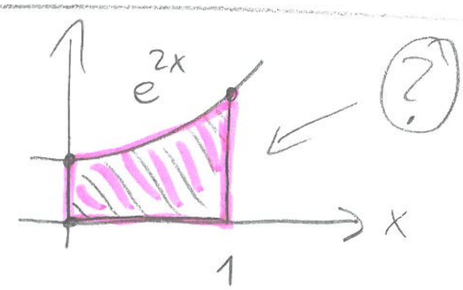
$$\boxed{T'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x}}$$

$T(x+\Delta x) - T(x) =$ ZÖLD SÍKIDOM TERÜLETE

$\approx \Delta x \cdot f(x)$ (ALAP X MAGASSÁG)

TEHÁT $T'(x) \approx \dfrac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x} \approx \dfrac{\Delta x \cdot f(x)}{\Delta x} = f(x)$

PL: $\boxed{f(x) = e^{2x}}$ $\boxed{T(1) = ?}$



$F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$ ANTIDERIVÁLTJA e^{2x} - NEK.

$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{2x} = e^{2x} = f(x)$ ✓ $\boxed{T'(x) = e^{2x}}$

$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$, TEHÁT $T(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + C$?

DE MI LEHET A C KONSTANS ÉRTÉKE?

$\boxed{T(0) = 0}$ $\boxed{T(0) = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0} + C = \frac{1}{2} + C = 0}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{C = -\frac{1}{2}}$

$\boxed{T(x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - 1\right)}$ $\Longrightarrow$ $T(1) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2} - 1\right)$

116. OLDAL

HATÁROZATLAN INTEGRÁL-SZÁMÍTÁS:

$$\boxed{\int 0\, dx = C} \quad \boxed{\int 1\, dx = x + C} : \boxed{(x+C)' = 1}$$

$$\boxed{\int c\, dx = c \cdot x + C_2} : \boxed{(c \cdot x + C_2)' = c}$$

$$\boxed{\int x\, dx = \frac{1}{2} \cdot x^2 + C} : \boxed{\left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + C\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x}$$

$$\boxed{\int 3x^2\, dx = x^3 + C} \quad \boxed{\int x^2\, dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 + C}$$

$$\int (2x^2 + 3x)\, dx = 2 \cdot \int x^2\, dx + 3 \cdot \int x\, dx =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 + C_1\right) + 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + C_2\right) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + C_3$$

ÁLTALÁNOS KONSTANSOK SZÁMSZOROSA, ÖSSZEGE = ÁLTALÁNOS KONSTANS

ÁLT: $\int (a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x))\, dx = a \cdot \int f(x)\, dx + b \cdot \int g(x)\, dx$

PL: $\int \left(\sin(x) + \frac{2}{x} - 1\right) dx =$

$\int \sin(x)\, dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx - \int 1\, dx = -\cos(x) + 2 \cdot \ln|x| - x + C$

117. OLDAL

$$\int x^{\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}\cdot x^{\alpha+1}, & \text{HA } \boxed{\alpha \neq -1} \\ \ln|x|, & \text{HA } \boxed{\alpha = -1} \end{cases}$$

VALÓBAN:

$\boxed{\alpha \neq -1}$: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\alpha+1}\cdot x^{\alpha+1}\right) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha+1}\cdot x^{\alpha} = x^{\alpha}$ ✓

$\boxed{\alpha = -1}$: $\boxed{x > 0}$: $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ ✓

$\boxed{x < 0}$: $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{d}{dx}\ln(-x) = \dfrac{1}{(-x)}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}$ ✓

LÁNCSZABÁLY: HA $\boxed{F'(x) = f(x)}$, AKKOR

$\dfrac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$, AZAZ

HA $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$, AKKOR $\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C}$

HELYETTESÍTÉSES INTEGRÁLÁS:

$\int F'(g(x))\cdot g'(x)\,dx =$

LEGYEN $u = g(x)$, EKKOR $\boxed{\dfrac{du}{dx} = g'(x)} \Rightarrow \boxed{g'(x)\,dx = du}$

$\int F'(u)\cdot du =$

$F(u) + C = F(g(x)) + C$

$\underline{PL}$: $\displaystyle\int \cos(3x-1)\,dx =$

$\boxed{\begin{array}{l} u = 3x-1 \\ \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{1}{3}du \end{array}}$

$$= \int \cos(u)\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \cos(u)\,du =$$

$$= \frac{1}{3}\sin(u) + C = \frac{1}{3}\cdot\sin(3x-1) + C$$

$\underline{ÁLT}$: $F'(x) = f(x) \Rightarrow \displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C$

$\underline{PL}$: $\displaystyle\int \frac{1}{(5-x)^2}\,dx =$

$\boxed{\begin{array}{l} u = 5-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \\ \Rightarrow dx = -du \end{array}}$

$$= \int \frac{1}{u^2}(-du) = -\int \frac{1}{u^2}du \underset{\boxed{\alpha=-2}}{=} -\left(\frac{-1}{u}\right) + C = \frac{1}{5-x} + C$$

$\underline{PL}$: $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int x^{1/2}dx + \int x^{-1/2}dx =$

$$= \frac{1}{1/2+1}\cdot x^{1/2+1} + \frac{1}{-1/2+1}\cdot x^{-1/2+1} = \frac{1}{3/2}\cdot x^{3/2} + \frac{1}{1/2}\cdot x^{1/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}\cdot x\cdot\sqrt{x} + 2\cdot\sqrt{x} + C$$

119. OLDAL

PL: $\int \frac{4x^3}{x^4+5}\,dx = ?$

$\boxed{\text{SZÁMLÁLÓ} = \frac{d}{dx}\,\text{NEVEZŐ}}$

HELYETTESÍTÉS: $\boxed{u = \text{NEVEZŐ}}$

$u = x^4+5 \qquad \frac{du}{dx} = 4\cdot x^3 \Rightarrow du = 4x^3\,dx$

$$? = \int \frac{4x^3\,dx}{x^4+5} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln(x^4+5) + C$$

ÁLT: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

PL: $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$

$u = \cos(x) \qquad \frac{du}{dx} = -\sin(x) \Rightarrow -du = \sin(x)\,dx$

$$\int \frac{\sin(x)\,dx}{\cos(x)} = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos(x)| + C$$

PL: $\int \mathrm{ch}^2(x)\cdot \mathrm{sh}(x)\,dx = \boxed{u = \mathrm{ch}(x) \quad \frac{du}{dx} = \mathrm{sh}(x) \quad \mathrm{sh}(x)\,dx = du}$

$$= \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\mathrm{ch}^3(x) + C$$

120. OLDAL

ÁLT: $\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,dx = \dfrac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$ $\boxed{\alpha \neq -1}$

PL: $\int \dfrac{\ln(x)}{x}\,dx = \int \ln(x)\cdot \ln'(x)\,dx =$ $\boxed{\begin{array}{l} u = \ln(x) \\ \dfrac{du}{dx} = \ln'(x) \\ du = \ln'(x)\,dx \end{array}}$

$= \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C$

PL: $\int \dfrac{x}{\sqrt{3-x^2}}\,dx = \int (3-x^2)^{-1/2}\cdot x\,dx =$?

$\boxed{u = 3-x^2} \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = -2x \Rightarrow \boxed{x\,dx = -\frac{1}{2}du}$

? $= \int u^{-1/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}du\right) = -\frac{1}{2}\cdot\int u^{-1/2}\,du =$

$= -\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-1/2}\cdot u^{1/2} = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{3-x^2} + C$

PL: $\int \dfrac{1}{\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}\,dx =$ $\boxed{\begin{array}{l} u = 2x-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \\ \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du \end{array}}$

$= \int \dfrac{1}{\sin^2(u)}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int\dfrac{1}{\sin^2(u)}\,du =$ KÉPLET-GYŰJTEMÉNY

$= \frac{1}{2}\cdot(-\mathrm{ctg}(u)) = -\frac{1}{2}\cdot\mathrm{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) + C$

121. OLDAL