EML: f x_0 KÖRÜLI n-EDRENDŰ TAYLOR-POLINOMJA:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}\cdot f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n$$

HA $\boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(x)}$ ← MARADÉKTAG, AKKOR

TAYLOR-TÉTEL: $\forall x$-HEZ $\exists\, b \in (x_0, x)$, HOGY

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(b)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}}$$

PL: KÖZELÍTSÜK e ÉRTÉKÉT $T_5(x)$ POLINOMMAL ÉS BECSÜLJÜK A KÖZELÍTÉS HIBÁJÁT!

MEGO: $\boxed{n=5}$ $\boxed{x_0=0}$ $\boxed{x=1}$

$$T_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

BECSLÉSÜNK e-RE: $\boxed{T_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.71\dot{6}}$

MARADÉKTAG:

$$R_5(1) = \frac{f^{(6)}(b)}{6!}\cdot(1-0)^6 = \frac{1}{6!}\cdot e^b \quad \text{VALAMILYEN } b \in (0,1)\text{-RE}$$

$$\Rightarrow \max_{0\le b\le 1} \frac{1}{6!}e^b = \frac{1}{6!}e^1 < \frac{3}{6!} = 0.00416, \text{ TEHÁT}$$

106. OLDAL

TEHÁT $|e-2.71\dot{6}| \leq 0.00416$

$$\underbrace{2.71\dot{6}}_{\boxed{\text{KÖZELÍTÉSÜNK}}} \qquad \underbrace{0.00416}_{\boxed{\text{LEGFELJEBB EKKORA A KÖZELÍTÉS HIBÁJA}}}$$

ÉS TÉNYLEG:

$e = 2.7182818\ldots$, ÍGY

$$|e-2.71\dot{6}| = \underbrace{0.0016151\ldots}_{\boxed{\text{TÉNYLEGES HIBA}}} < \underbrace{0.00416}_{\boxed{\text{BECSÜLT HIBA}}}$$

NEVEZETES TAYLOR-POLINOMOK:

e^x : $T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

$\sin(x)$: $T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

$\cos(x)$: $T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

MEGJ:

$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$

$\frac{d}{dx} T_7(x) = T_6(x)$

$\text{ch}(x)$: $T_6(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}$

$\text{sh}(x) = T_5(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$\frac{d}{dx}\text{ch}(x) = \text{sh}(x)$

$\frac{d}{dx} T_6(x) = T_5(x)$

PL: KÖZELÍTSÜK $\sqrt{0.5}$ ÉRTÉKÉT ÉS ADJUNK BECSLÉST A HIBÁRA! $f(x)=\sqrt{x}$, $T_3(x)$

VIGYÁZAT: $x_0=0$ NEM JÓ, MERT $f'(x_0)=f'(0)=+\infty$ ↯

LEGYEN HELYETTE $\boxed{x_0=1}$

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$$
$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}$$
$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-3/2}$$
$$f'''(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{-5/2}$$
$$f^{(4)}(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot x^{-7/2}=-\frac{15}{16}\cdot x^{-7/2}$$

$$f(1)=1$$
$$f'(1)=\frac{1}{2}$$
$$f''(1)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$
$$f'''(1)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

$$T_3(x)=f(1)+f'(1)\cdot(x-1)+\frac{1}{2!}f''(1)\cdot(x-1)^2+\frac{1}{3!}\cdot f'''(1)\cdot(x-1)^3$$
$$=1+\frac{1}{2}\cdot(x-1)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(x-1)^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdot(x-1)^3$$

$$T_3(0.5)=1+\frac{1}{2}\cdot(-0{,}5)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-0{,}5)^2+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{8}\cdot(-0{,}5)^3$$
$$=0.7109375 \leftarrow \boxed{\text{BECSLÉSÜNK } \sqrt{0.5}\text{-RE.}}$$

BECSÜLT HIBA: $R_3(0.5)=\frac{f^{(4)}(b)}{4!}\cdot(0.5-1)^4$ $\boxed{\text{VALAMILYEN } b\in(0.5,1)\text{-RE}}$

$$|R_3(0.5)|=\frac{15}{16}\cdot b^{-7/2}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(0.5)^4$$ ← EZ b-NEK CSÖKKENŐ FÜGGVÉNYE, ÍGY $b=0.5$-NÉL MAXIMÁLIS, HA

$$|R_3(0.5)|\le\frac{15}{16}\cdot(0.5)^{-7/2}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(0.5)^4=0.02762$$ → $\boxed{\text{BECSÜLT HIBA}}$

108. OLDAL

DEF: AZT MONDJUK, HOGY AZ f ÉS g GRAFIKONJAI n-EDRENDBEN ÉRINTKEZNEK AZ x_0 HELYEN, HA

$\boxed{f(x_0)=g(x_0)}$, $\boxed{f'(x_0)=g'(x_0)}$, ..., $\boxed{f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)}$

PL: AZ n-EDRENDŰ x_0 KÖRÜLI TAYLOR-POLINOMA n-EDRENDBEN ÉRINTKEZIK f-EL.

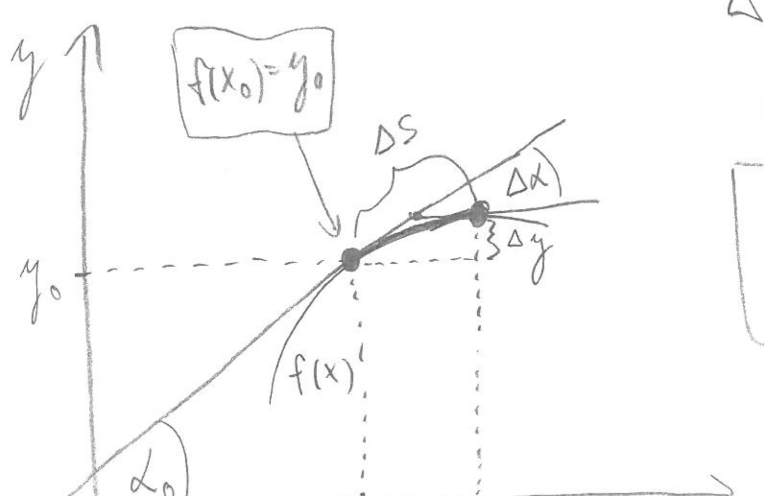
---

f ÉS g 0-ADRENDBEN ÉRINTKEZIK $\Longleftrightarrow$ $\boxed{x_0\text{-BAN METSZIK EGYMÁST}}$

f ÉS g ELSŐ RENDBEN — " — $\Longleftrightarrow$ $\boxed{x_0\text{-BAN ÉRINTIK EGYMÁST}}$

f ÉS g MÁSOD — " — — " — $\Longrightarrow$ $\boxed{x_0\text{-BAN ÉRINTIK EGYMÁST + A GÖRBÜLETÜK IS AZONOS } x_0\text{-BAN}}$

DEF: GÖRBÜLET:



Δs = ÍVHOSSZ MEGVÁLTOZÁSA

$\Delta\alpha$ = SZÖG MEGVÁLTOZÁSA

GÖRBÜLET x_0-BAN:

$$\boxed{G(x_0)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}}$$

TÉTEL: $\boxed{G(x_0) = \dfrac{f''(x_0)}{\left(1+\left(f'(x_0)\right)^2\right)^{3/2}}}$

BIZ: $G(x_0) = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta \alpha}{\Delta s}$

PITHAGORASZ: $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x)^2 + \left(f'(x_0) \cdot \Delta x\right)^2 =$

$= (\Delta x)^2 \cdot \left(1 + f'(x_0)^2\right) \implies \Delta s = \Delta x \cdot \sqrt{1+f'(x_0)^2}$

$\implies \boxed{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}}$

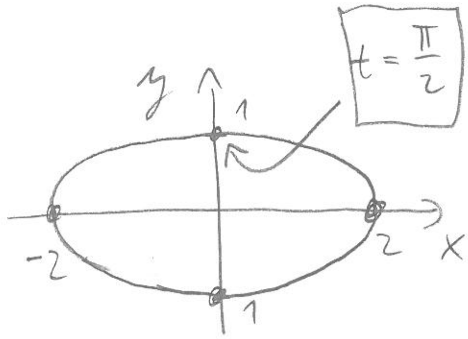
MÁSRÉSZT $f'(x_0) = tg(\alpha_0) \implies \alpha(x_0) = \arctan\left(f'(x_0)\right)$

$\boxed{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \alpha}{\Delta x}} = \alpha'(x_0) = \arctan'\left(f'(x_0)\right) \cdot f''(x_0) = \boxed{\dfrac{f''(x_0)}{1+\left(f'(x_0)\right)^2}}$

ÍGY $G(x_0) = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta \alpha}{\Delta x} \cdot \dfrac{\Delta x}{\Delta s} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\left(\dfrac{\Delta \alpha}{\Delta x}\right)}{\left(\dfrac{\Delta s}{\Delta x}\right)} = \dfrac{\left(\dfrac{f''(x_0)}{1+\left(f'(x_0)\right)^2}\right)}{\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}} = \dfrac{f''(x_0)}{\left(1+\left(f'(x_0)\right)^2\right)^{3/2}}$ ✓

PL: SZÁMÍTSUK KI AZ $\boxed{x = 2\cos(t),\ y = \sin(t)}$ ELLIPSZIS $\boxed{t = \frac{\pi}{2}}$ PARAMÉTERŰ PONTJÁBAN A GÖRBÜLET ÉRTÉKÉT!



MEGOLDÁS: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -2\sin(t)$

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = \cos(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\cos(t)}{-2\sin(t)} = -\frac{1}{2}\cdot\cot(t) \Rightarrow \boxed{y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\left(\frac{dy'}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\cot(t)\right)}{\dot{x}(t)} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sin^2(t)}}{-2\cdot\sin(t)}$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{1^2}}{-2\cdot 1} = -\frac{1}{4}$$

$$G\left(t = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}} = \frac{-1/4}{\left(1+0^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{4}$$

DEF: AZ $y = f(x)$ GÖRBÉT AZ (x_0, y_0) PONTBAN MÁSODRENDBEN ÉRINTŐ KÖRT AZ f FV. x_0 PONTHOZ TARTOZÓ SIMULÓKÖRÉNEK HÍVJUK.

111. OLDAL

TÉTEL: (NEM BIZ) ADOTT f, x_0:

SIMULÓKÖR EGYENLETE: $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$

u = KÖR KÖZÉPPONTJÁNAK VÍZSZINTES KOORDINÁTÁJA

v = — " — — " — FÜGGŐLEGES — " —

r = KÖR SUGARA

EKKOR: $\boxed{v = f(x_0) + \dfrac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}}$ $\boxed{u = x_0 - \dfrac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}\cdot f'(x_0)}$

$$\boxed{r = \frac{\left(1+(f'(x_0))^2\right)^{3/2}}{|f''(x_0)|} = \frac{1}{|G(x_0)|}}$$

SIMULÓKÖR SUGARA = GÖRBÜLET RECIPROKA

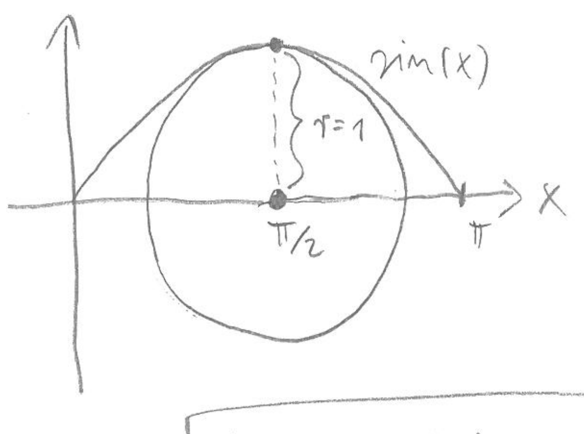
TÉNY: KÖR BÁRMELY PONTJABELI SIMULÓKÖRE ÖNMAGA

EGYENES SIMULÓKÖRÉNEK SUGARA $= +\infty$

PL: $y=\sin(x)$, $x_0=\frac{\pi}{2}$ SIMULÓKÖR?

$y'=\cos(x)$, $y''=-\sin(x)$ $\boxed{y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0}$ $\boxed{y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1}$

$$G(x_0)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{-1}{(1+0^2)^{3/2}}=-1$$



$$u = x_0-\frac{1+y'^2}{y''}\cdot y' = \frac{\pi}{2}-\frac{1+0}{-1}\cdot 0=\frac{\pi}{2}$$

$$v = y_0+\frac{1+y'^2}{y''}=1+\frac{1+0}{-1}=0$$

PL: KERESSÜK AZ $y = e^x$ GÖRBE AZON PONTJÁT, MELYBEN A GÖRBÜLET MAXIMÁLIS.

MEGO: $$G(x) = \frac{y''(x)}{\left(1+y'(x)^2\right)^{3/2}} = \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^{3/2}}$$

$G(x)$ KRITIKUS PONTJAI?

$$G'(x) = \frac{e^x \cdot \left(1+e^{2x}\right)^{3/2} - e^x \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(1+e^{2x}\right)^{1/2} \cdot e^{2x} \cdot 2}{\left(1+e^{2x}\right)^3} =$$

$$= \frac{e^x \cdot \left(1+e^{2x}\right)^{1/2}}{\left(1+e^{2x}\right)^3} \cdot \left(1+e^{2x}-3e^{2x}\right) = \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)^{5/2}} \cdot \left(1-2e^{2x}\right)$$

$$G'(x) = 0 \iff 1 - 2 \cdot e^{2x} = 0 \iff e^{2x} = \frac{1}{2}$$

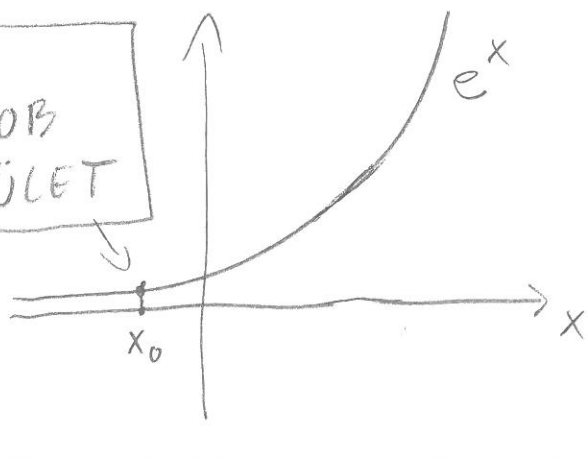
$$\Longrightarrow \boxed{x_0 = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

ÉS VALÓBAN x_0 MAXIMUMHELY,

MIVEL $x < x_0 \Rightarrow G'(x) > 0$, $G \nearrow$

$x > x_0 \Rightarrow G'(x) < 0$, $G \searrow$

ITT A LEGNAGYOBB A GÖRBÜLET



x_0