PARAMÉTERESEN MEGADOTT FV. DERIVÁLÁSA:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(x) \end{aligned}}$$

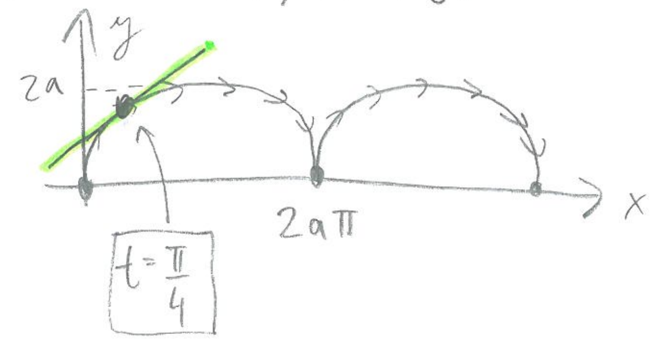
HA $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}(t)$, $\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}(t)$

AKKOR $\boxed{y' = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}}$ (HA $\dot{x}(t) \neq 0$)

MIÉRT? HA $y = y(x(t))$, AKKOR A LÁNCSZABÁLY

MIATT: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, AZAZ $\boxed{\dot{y}(t) = y' \cdot \dot{x}(t)}$ ✓

PL.: $\boxed{\begin{aligned} x(t) &= a \cdot (t - \sin(t)) \\ y(t) &= a \cdot (1 - \cos(t)) \end{aligned}}$ ← CIKLOIS: 49. OLDAL



$y'\left(t = \frac{\pi}{4}\right) = ?$

MI A ZÖLD ÉRINTŐ EGYENES MEREDEKSÉGE?

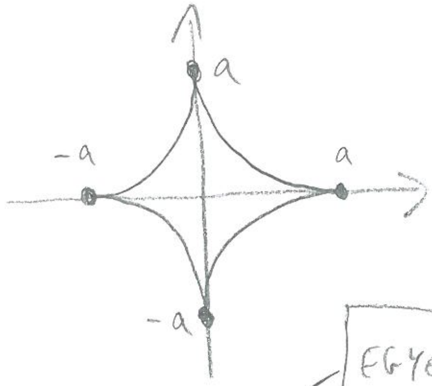
$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a \cdot (1 - \cos(t)) \\ \dot{y}(t) &= a \cdot \sin(t) \end{aligned}\right\} \quad y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}$$

$$y'\left(t = \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}/2}{1 - \sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{2} + 2}{4 - \sqrt{2}^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1$$

99. OLDAL

PL: $\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cdot\cos^3(t) \\ y(t) &= a\cdot\sin^3(t) \end{aligned}\right\}$ $\boxed{0\le t\le 2\pi}$ ASZTROIS:



A GÖRBE MELY PONTJÁBAN PÁRHUZAMOS AZ $x+y+5=0$ EGYENLETŰ EGYENESSEL?

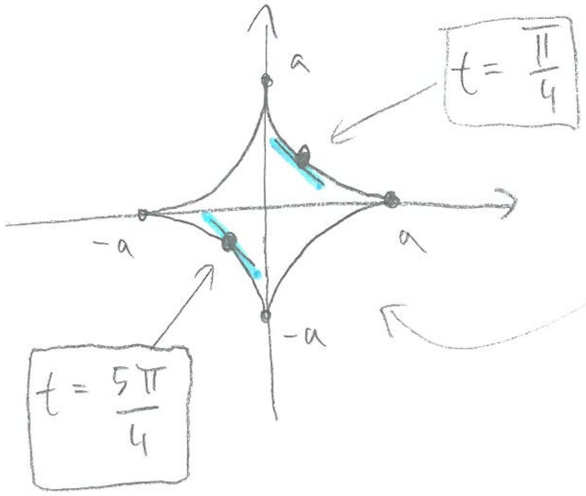
MEGOLDÁS: $x+y+5=0 \iff y=-x-5 \implies \boxed{m=-1}$

EGYENES MEREDEKSÉGE

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a\cdot 3\cdot\cos^2(t)\cdot(-\sin(t)) \\ \dot{y}(t) &= a\cdot 3\cdot\sin^2(t)\cdot\cos(t) \end{aligned}\right\} y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\sin^2(t)\cdot\cos(t)}{-\cos^2(t)\cdot\sin(t)} =$$

$= -\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = -tg(t) =$ ASZTROIS ÉRINTŐJÉNEK MEREDEKSÉGE A t PONTBAN. KELL: $\boxed{-tg(t)=-1}$

AZAZ: $tg(t)=1 \implies \boxed{t=\frac{\pi}{4}}$ VAGY $\boxed{t=\frac{5}{4}\pi}$



A KÉK EGYENESEK MEREDEKSÉGE TÉNYLEG -1

100. OLDAL

POLINOMOK:

VALÓS EGYÜTTHATÓS

PL: $\boxed{x^2+\frac{1}{2}x+1}$ $\boxed{3x^5+x^3-\frac{2}{3}x^2-10x+5}$

SŐT: $\boxed{2z^2+(1+i)\cdot z^4+(2-3i)\cdot z^3+i\cdot z^2-2z+1}$

KOMPLEX EGYÜTTHATÓS.

ÁLTALÁBAN: $\boxed{p(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0}$

n-EDFOKÚ

PL: ELSŐFOKÚ: $\boxed{-x+\frac{1}{3}}$ $\boxed{\text{NULLADFOKÚ: } -\frac{1}{8}}$

(NEM POLINOM: $\boxed{x^{-3}+x^2+1}$, $\boxed{x^{1/3}}$, $\boxed{\sqrt{x}}$, $\boxed{x^x}$)

SŐT: $\boxed{p(x)=b_n\cdot(x-5)^n+b_{n-1}\cdot(x-5)^{n-1}+\ldots+b_1\cdot(x-5)+b_0}$

EZ IS EGY n-EDFOKÚ POLINOM, CSAK $(x-5)$ HATVÁNYAI SZERINT FEJTETTÜK KI!

$\boxed{b_2=1}$ $\boxed{b_1=-1}$ $\boxed{b_0=2}$: $1\cdot(x-5)^2-1\cdot(x-5)+2=$

$=x^2-10x+25-x+5+2=x^2-11x+32$

$\boxed{a_2=1}$ $\boxed{a_1=-11}$ $\boxed{a_0=32}$

ÍGY IS, ÚGY IS MÁSODFOKÚ POLINOM

TAYLOR-POLINOM:

n-EDFOKÚ p POLINOMMAL AKARJUK KÖZELÍTENI AZ f FÜGGVÉNYT. MELYIK POLINOM „SIMUL" LEGJOBBAN f GRAFIKONJÁHOZ AZ x_0 PONTBAN?

VÁLASZ: LEGYEN p OLYAN, HOGY

$$p(x_0)=f(x_0), \; p'(x_0)=f'(x_0), \; \dots, \; p^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$$

AZAZ p „n-EDRENDBEN" SIMUL f-HEZ x_0-BAN.

ÁLLÍTÁS: PONTOSAN EGY ILYEN n-EDFOKÚ p POLINOM VAN.

KERESSÜK MEG!

$$p(x)=c_0+c_1\cdot(x-x_0)+c_2\cdot(x-x_0)^2+c_3\cdot(x-x_0)^3+\dots+c_n\cdot(x-x_0)^n$$

$$p'(x)=0+c_1+2\cdot c_2\cdot(x-x_0)+3\cdot c_3\cdot(x-x_0)^2+\dots+n\cdot c_n\cdot(x-x_0)^{n-1}$$

$$p''(x)=0+0+2\cdot c_2+3\cdot 2\cdot c_3\cdot(x-x_0)+\dots+n\cdot(n-1)\cdot c_n\cdot(x-x_0)^{n-2}$$

$$p'''(x)=0+0+0+3\cdot 2\cdot c_3+\dots+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot c_n\cdot(x-x_0)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$p^{(n)}(x)=0+\dots+0+n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot c_n\cdot(x-x_0)^0=n!\cdot c_n$$

$$p^{(n+1)}(x)\equiv 0 \leftarrow \boxed{\text{n-EDFOKÚ POLINOM n+1-EDIK DERIVÁLTJA} \equiv 0}$$

102. OLDAL

$P(x_0)=c_0$, $P'(x_0)=c_1$, $P''(x_0)=2\cdot c_2$, $P'''(x_0)=6\cdot c_3$

$\boxed{P^{(r)}(x_0)=r!\cdot c_r} \leftarrow \boxed{r=0,1,2,\dots,n}$

KELL: $\boxed{P^{r}(x_0)=f^{(r)}(x_0)}$ LEGYEN HÁT $\boxed{c_r=\dfrac{f^{(r)}(x_0)}{r!}}$

DEF.: AZ f FÜGGVÉNY x_0 KÖRÜLI n-EDRENDŰ TAYLOR-POLINOMJA:

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\dots+\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n$$

PL.: $f(x)=x^2-11x+32$ MI AZ f FÜGGVÉNY $\boxed{x_0=5}$ KÖRÜLI 3-EDRENDŰ TAYLOR-POLINOMJA?

$f'(x)=2x-11$ $\quad f''(x)\equiv 2$ $\quad f'''(x)\equiv 0$

$f'(5)=-1$ $\quad f''(5)=2$ $\quad f'''(5)=0$

$f(5)=5^2-11\cdot 5+32=25-55+32=2$

$$T_3(x)=f(5)+f'(5)\cdot(x-5)+\frac{1}{2}\cdot f''(5)\cdot(x-5)^2+\frac{1}{6}\cdot f'''(5)\cdot(x-5)^3$$

$$=2+(-1)\cdot(x-5)+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(x-5)^2+0\cdot(x-5)^3$$

$$=(x-5)^2-(x-5)+2$$ ✓ (LÁSD 101. OLDAL)

PL: $f(x) = e^x$ KERESSÜK MEG $T_3(x)$-ET $\boxed{x_0 = 0}$!

$f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$

$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$, TEHÁT:

$$T_3(x) = 1 + 1\cdot(x-0) + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(x-0)^2 + \frac{1}{6}\cdot(x-0)^3$$

$$= \frac{1}{0!}\cdot x^0 + \frac{1}{1!}\cdot x^1 + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$\boxed{T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}$$

PL: $\boxed{f(x) = \cos(x)}$, $T_5(x) = ?$ HA $\boxed{x_0 = 0}$

$f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$

$f'''(x) = \sin(x)$, $f^{(4)}(x) = \cos(x)$, $f^{(5)}(x) = -\sin(x)$

$f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$, $f^{(5)}(0) = 0$

$$T_5(x) = 1\cdot x^0 + 0\cdot x^1 + \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot 0\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot 1\cdot x^4 + \frac{1}{5!}\cdot 0\cdot x^5$$

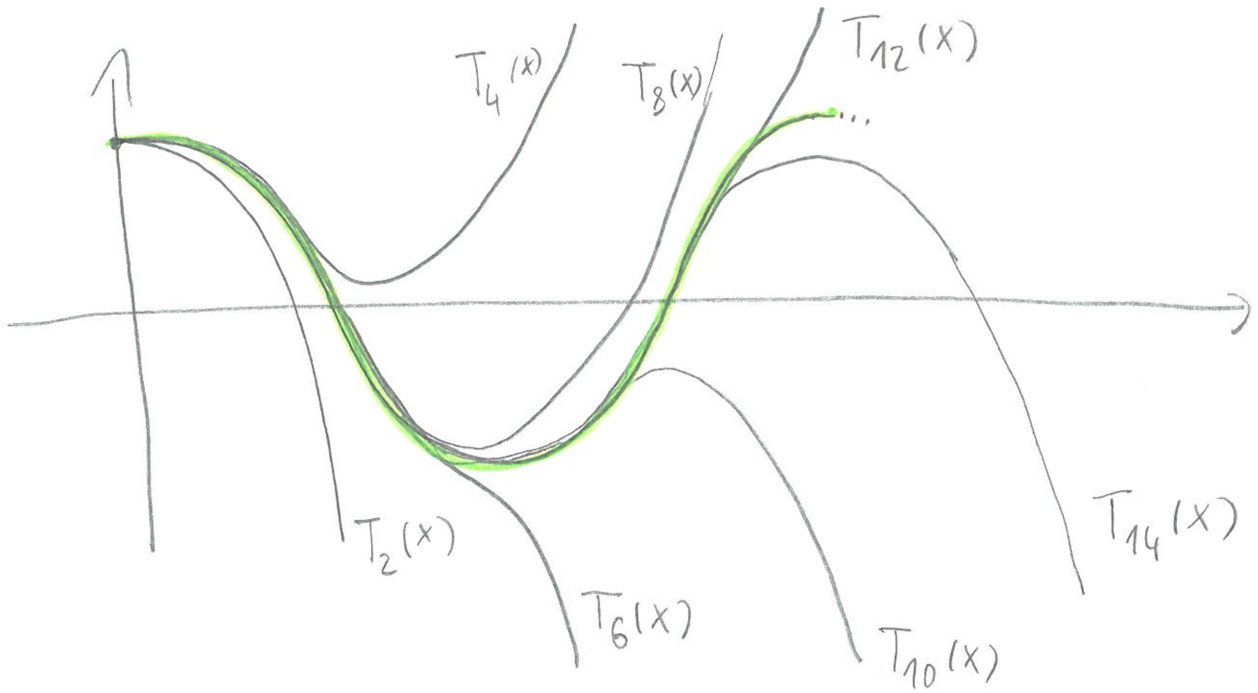
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = T_4(x)$$

HASONLÓAN: $T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$

$\cos(x)$ FV. TAYLOR-POLINOMJA

104. OLDAL

$x \longmapsto \cos(x)$ TAYLOR-POLINOMJAI:



AHOGY n NÖVEKSZIK, $T_n(x)$ EGYRE JOBBAN KÖZELÍTI $\cos(x)$-ET! MILYEN JÓL?

$\boxed{f(x) = T_n(x) + R_n(x)}$, AHOL $\boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(x)}$

$T_n(x)$ = KÖZELÍTÉS AZ x HELYEN

$R_n(x)$ = MARADÉKTAG. MILYEN KICSI $R_n(x)$?

TAYLOR-TÉTEL: $T_n(x)$ n-EDRENDŰ TAYLOR x_0 KÖRÜL

HA f $n+1$-SZER DIFF.HATÓ, AKKOR BÁRMELYIK x-HEZ VAN OLYAN $\xi \in (x_0, x)$, HOGY

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}$$