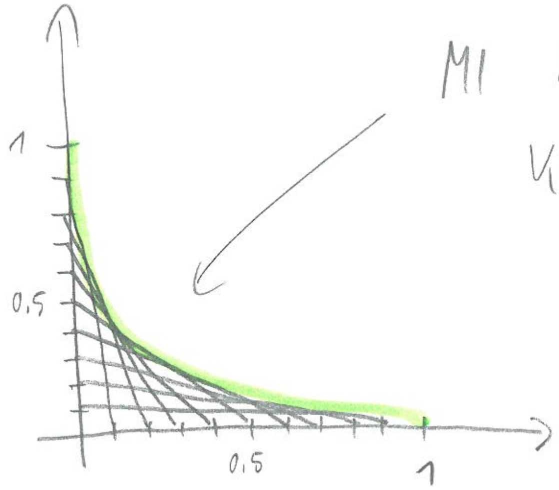
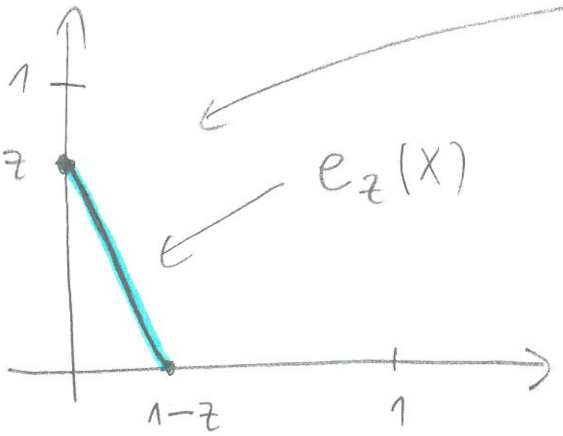
PL.:



MI A ZÖLD FÜGGVÉNY KÉPLETE? $f(x) = ?$



MINDEN $\boxed{0<z<1}$ -RE HÚZUNK EGY EGYENEST. z PARAMÉTERŰ $e_z(x)$ EGYENES ÁTMEGY A $(0,z)$ ÉS AZ $(1-z,0)$ PONTOKON.

$$e_z(x) = z - \frac{z}{1-z} \cdot x = z + \left(1 + \frac{1}{z-1}\right) \cdot x =: g_x(z)$$

VALÓBAN ÁTMEGY: $e_z(0) = z$, $e_z(1-z) = 0$

$$f(x) = \max_{0 \le z \le 1} e_z(x) = \max_{0 \le z \le 1} g_x(z)$$

RÖGZÍTSÜK X-ET. $g_x(z)$ KRITIKUS PONTJAI?

$$\frac{\partial}{\partial z} g_x(z) = 1 - \frac{1}{(z-1)^2} \cdot x = 0 \Rightarrow (z-1)^2 = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z - 1 = -\sqrt{x} \Rightarrow \boxed{z_0 = 1 - \sqrt{x}}$$ ← z_0 KRITIKUS PONTJA $g_x(z)$-NEK

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} g_x(z) = \frac{2}{(z-1)^3} \cdot x < 0$$ (HISZEN $0<z<1$)

$g_x(z)$ KONKÁV FÜGGVÉNYE z-NEK

TEHÁT $z_0 = 1-\sqrt{x}$ MAXIMUMHELYE $g_x(z)$-NEK

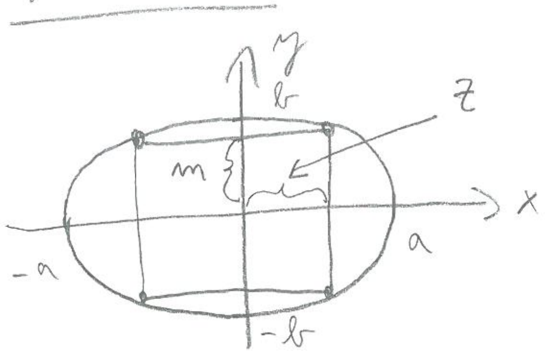
$$f(x) = \max_{0\le z\le 1} g_x(z) = g_x(1-\sqrt{x}) = e_{1-\sqrt{x}}(x) =$$

$$= 1-\sqrt{x} - \frac{1-\sqrt{x}}{1-(1-\sqrt{x})}\cdot x = 1-\sqrt{x} - (1-\sqrt{x})\cdot\sqrt{x} =$$

$$= 1 - 2\cdot\sqrt{x} + x = (1-\sqrt{x})^2$$

PL: TALÁLJA MEG AZ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ EGYENLETŰ ELLIPSZISBE ÍRHATÓ TÉGLALAPOK KÖZÜL A LEGNAGYOBB TERÜLETŰT!

MEGOLDÁS:



TÉGLALAP SZÉLESSÉGE: $2\cdot z$

— " — MAGASSÁGA: $2\cdot m$

— " — TERÜLETE: $4\cdot z\cdot m$

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{m^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{a^2} \Rightarrow m^2 = b^2 - \left(\frac{b}{a}\cdot z\right)^2$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{a}z\right)^2} \Rightarrow V(z) = 4\cdot z\cdot\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}\cdot z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(z) = 4\cdot b\cdot z\cdot\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}}$$

$\boxed{\text{MAXIMALIZÁLNI } V(z)\text{-T}} \Longleftrightarrow \boxed{\text{MAXIMALIZÁLNI } V^2(z)\text{-T}}$

$$V^2(z) = (4b)^2\cdot z^2\cdot\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)$$

93. OLDAL

$$f(z)=(4b)^2\cdot z^2\cdot\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)=(4b)^2\cdot\left(z^2-\frac{z^4}{a^2}\right)$$

$$f'(z)=(4b)^2\cdot\left(2z-4z^3/a^2\right)=$$

$$=32b^2\cdot z\cdot\left(1-2\cdot\frac{z^2}{a^2}\right)=0$$ $\boxed{\text{KRITIKUS PONT}}$

$\boxed{z_1=0}$ VAGY $1-2\cdot\frac{z^2}{a^2}=0 \iff \frac{1}{2}=\frac{z^2}{a^2}$

$\iff \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{z}{a}$ (HISZEN $z>0$) : $\boxed{z_2=\frac{a}{\sqrt{2}}}$

$$f''(z)=(4b)^2\cdot\left(2-12\cdot z^2/a^2\right)$$

$f''(z_1)=f''(0)=(4b)^2\cdot 2>0$: LOK. MIN ↯

$f''(z_2)=f''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=(4b)^2\cdot\left(2-12\cdot\frac{1}{2}\right)<0$: LOK. MAX ✓

MEGOLDÁS: $\boxed{z=\frac{a}{\sqrt{2}}}$ $\boxed{m=\sqrt{b^2-\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{b}{\sqrt{2}}}$

IMPLICIT MÓDON MEGADOTT FÜGGVÉNY DERIVÁLÁSA:

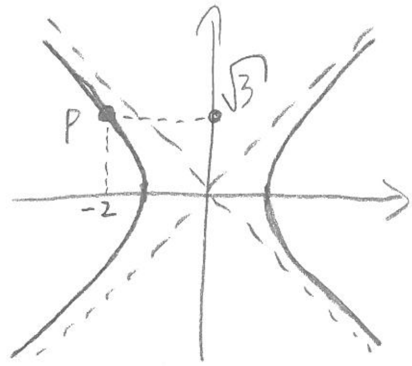
PL: $x^2-y^2=1$ HIPERBOLA $P(-2,\sqrt{3})$

RAJTA VAN A HIPERBOLÁN: $(-2)^2-\sqrt{3}^2=1$ ✓

MI A P PONTBAN HÚZOTT ÉRINTŐ EGYENES EGYENLETE?

94. OLDAL

$\boxed{x^2 - y^2 = 1} \Leftarrow$ IMPLICIT ALAK.



EXPLICIT ALAK: $\boxed{y = \sqrt{x^2 - 1}}$

KÖNNYŰ IMPLICIT ALAKBAN DERIVÁLNI:

$\boxed{x^2 - y^2(x) = 1} \Leftarrow$ DERIVÁLJUK MINDKÉT OLDALT:

$$2x - 2y(x) \cdot y'(x) = 0 \Longrightarrow \boxed{y'(x) = \frac{x}{y(x)}} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow$ HA $\boxed{x_0 = -2}$, AKKOR $\boxed{y_0 = y(x_0) = \sqrt{3}}$

$\boxed{y'(x_0) = \frac{-2}{\sqrt{3}}} \leftarrow$ EZ AZ ÉRINTŐ MEREDEKSÉGE

EGYENES EGYENLETE: $\boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$, AZAZ

$\boxed{y - \sqrt{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x + 2)} \leftarrow$ MEGOLDÁS

PL: $y^2 - 3xy + x^2 = 5$ $\boxed{y' = ?}$ AZ $(1,4)$ PONTBAN

$4^2 - 3 \cdot 1 \cdot 4 + 1^2 = 16 - 12 + 1 = 5$ ✓ TÉNYLEG RAJTA VAN $(1,4)$ AZ IMPLICIT MÓDON MEGADOTT GÖRBÉN: $y(1) = 4$.

$y^2(x) - 3x \cdot y(x) + x^2 = 5 \qquad P(1,4)$

DERIVÁLJUK LE AZ EGYENLETET MINDKÉT OLDALÁT!

$2 \cdot y(x) \cdot y'(x) - 3 \cdot y(x) - 3x \cdot y'(x) + 2x = 0$

$y'(x) \cdot (2y(x) - 3x) + 2x - 3y(x) = 0$

$$\boxed{y'(x) = \frac{3y(x) - 2x}{2y(x) - 3x}} \Rightarrow y'(1) = \frac{3 \cdot y(1) - 2 \cdot 1}{2 \cdot y(1) - 3 \cdot 1} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 1}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 1} = \frac{10}{5} = 2$$

PL: AZ $\boxed{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1}$ EGYENLETŰ ELLIPSZIS ← ☆

MELY PONTJAIBAN PÁRHUZAMOS AZ ÉRINTŐ AZ $\boxed{x + 3y + 6 = 0}$ EGYENESSEL?

MEGOLDÁS: EGYENES: $3y = -6 - x \Rightarrow \boxed{y = -2 - \frac{x}{3}}$

$\Rightarrow$ MEREDEKSÉGE: $\boxed{m = -1/3}$

☆ DERIVÁLTJA: $\frac{2x}{9} + \frac{2y(x) \cdot y'(x)}{4} = 0 \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{-y \cdot y'}{4}$

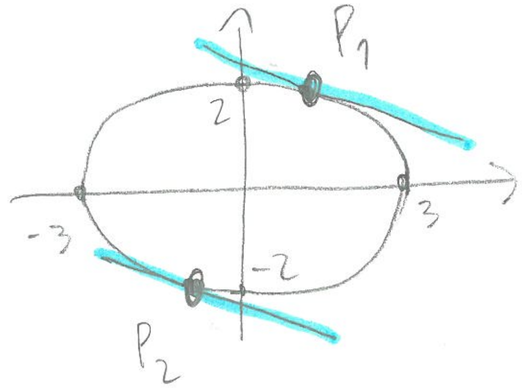
$$\Rightarrow y' = -\frac{4}{9} \cdot \frac{x}{y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{KELL}}}{=} -\frac{1}{3}$$

KELL: $\boxed{-\frac{4x}{9y} = -\frac{1}{3}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{3}\cdot x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(4/3\,x)^2}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{4}{9}x^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 = 9 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt5} \qquad x_2 = -\frac{3}{\sqrt5}$$



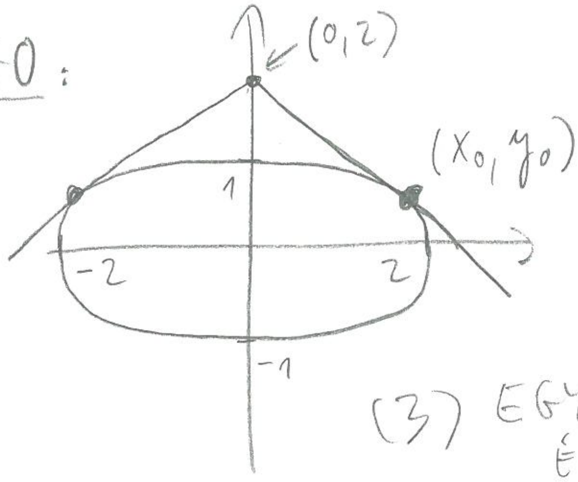
$$y_1 = \frac{4}{3}\cdot x_1 = \frac{4}{\sqrt5} \qquad y_2 = \frac{4}{3}\cdot x_2 = -\frac{4}{\sqrt5}$$

$$P_1\left(\frac{3}{\sqrt5}, \frac{4}{\sqrt5}\right) \quad P_2\left(\frac{-3}{\sqrt5}, \frac{-4}{\sqrt5}\right)$$

EZEKBEN A PONTOKBAN $\boxed{m = -\frac{1}{3}}$ AZ ÉRINTŐ MEREDEKSÉGE.

PL: ÍRJUK FEL AZON EGYENESEK EGYENLETÉT, MELYEK ÁTMENNEK A (0,2) PONTON ÉS ÉRINTIK AZ $\boxed{x^2+4y^2=4}$ EGYENLETŰ ELLIPSZIST!

MEGO:



(1) (x_0, y_0) RAJTA VAN AZ ELLIPSZISEN

(2) (x_0, y_0) RAJTA VAN AZ EGYENESEN

(3) EGYENES ÉRINTŐ

97. OLDAL

$x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow$ DERIVÁLÁS $\Rightarrow 2x + 8y \cdot y' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y' = -\frac{x}{4y}}$, TEHÁT (1) $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$

$\boxed{\text{EGYENES, ÁTMEGY (0,2)-N}} \Rightarrow$ (2) $y_0 = m \cdot x_0 + 2$

$\boxed{\text{EGYENES MEREDEKSÉGE = } = (x_0, y_0) \text{ PONTBELI ÉRINTŐ MEREDEKSÉGE}} \Rightarrow$ (3) $m = -\frac{x_0}{4y_0}$

(2) & (3) : $\boxed{y_0 = -\frac{x_0}{4y_0} \cdot x_0 + 2} \Rightarrow \boxed{4y_0^2 + x_0^2 = 8y_0}$ ☆

(1) & ☆ : $\boxed{4 = 8y_0} \Rightarrow \boxed{y_0 = \frac{1}{2}}$ ☺

(1) & ☺ : $x_0^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \Rightarrow \boxed{x_0^2 = 3} \Rightarrow \boxed{x_0 = \pm\sqrt{3}}$

$x_0 = \sqrt{3} \Rightarrow m = -\frac{x_0}{4y_0} = -\frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 1/2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

EGYIK EGYENES: $\boxed{y = m \cdot x + 2} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2}$

$x_0 = -\sqrt{3} \Rightarrow m = -\frac{x_0}{4y_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

MÁSIK EGYENES: $\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2}$