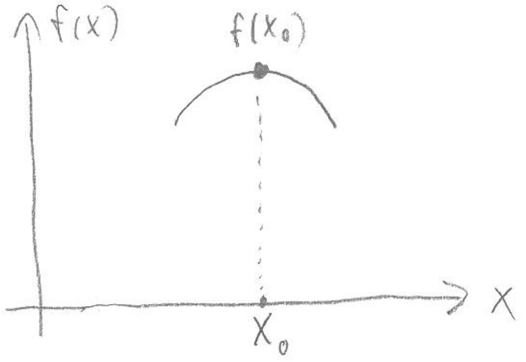
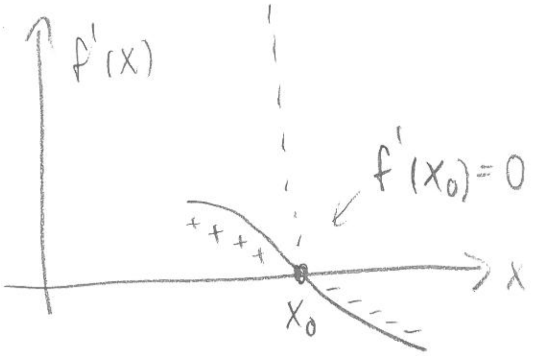
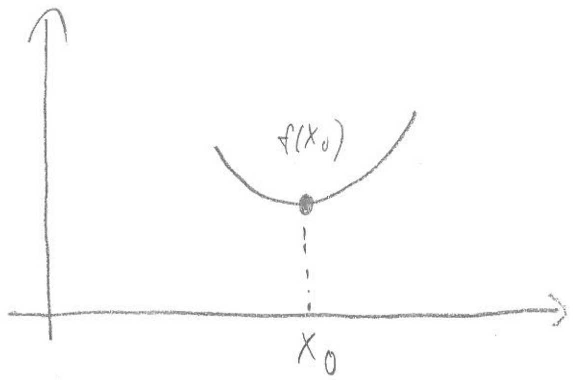
LOKÁLIS MAX:

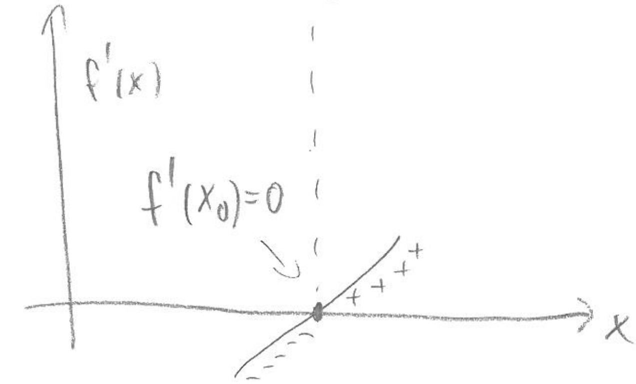




f LOKÁLISAN KONKÁV
f' LOKÁLISAN CSÖKKEN

LOKÁLIS MIN:





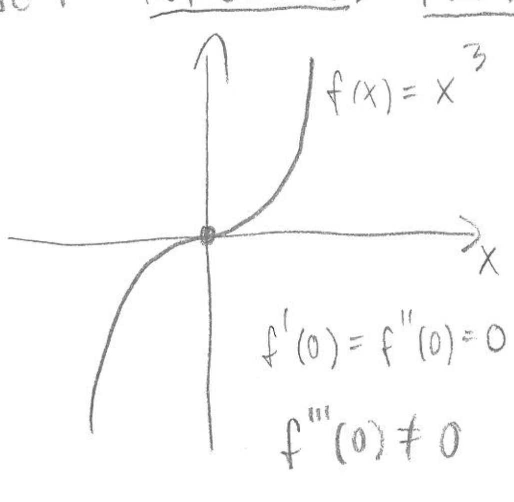
f LOKÁLISAN KONVEX
f' LOKÁLISAN NŐ

TÉNY: HA $f'(x_0)=0$ ÉS $f''(x_0)<0 \Rightarrow$ $\boxed{x_0 \text{ LOK. MAX. HELY}}$

TÉNY: HA $f'(x_0)=0$ ÉS $f''(x_0)>0 \Rightarrow$ $\boxed{x_0 \text{ LOK. MIN. HELY}}$

DE MI VAN, HA $f'(x_0)=0$ ÉS $f''(x_0)=0$?

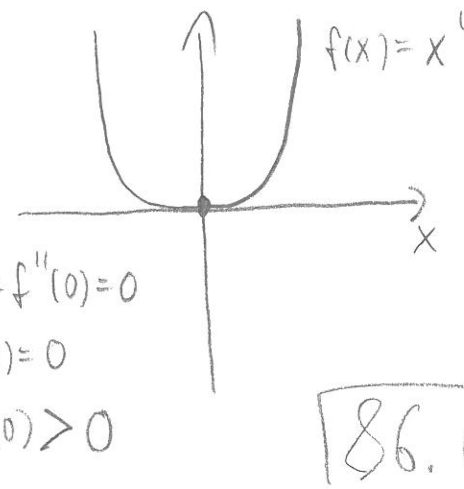
LEHET INFLEXIÓS PONT:



$f'(0)=f''(0)=0$

$f'''(0)\neq 0$

LEHET SZÉLSŐÉRTÉK:



$f'(0)=f''(0)=0$

$f'''(0)=0$

$f^{(4)}(0)>0$

TÉTEL:

HA $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$

EKKOR f-NEK AZ x_0 HELYEN LOK. SZÉLSŐ-ÉRTÉKE VAN: $f^{(2n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ MIN

$f^{(2n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ MAX

HA $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n)}(x_0) = 0$, $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$

EKKOR AZ f-NEK AZ x_0 HELYEN INFLEXIÓS PONTJA VAN.

$\boxed{x_0 = 0 \text{ KRITIKUS PONT}}$

Pl.: $y = x^2 \cdot \sin(x)$

$y' = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$ $\quad \boxed{y'(0) = 0}$

$y'' = 2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) + 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)$

$= 2 \cdot \sin(x) + 4x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)$: $\boxed{y''(0) = 0}$

$y''' = 2 \cdot \cos(x) + 4 \cdot \cos(x) - 4x \cdot \sin(x) - 2x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)$

$= 6 \cdot \cos(x) - 6x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)$

$\boxed{y'''(0) = 6 \neq 0}$ $\quad \boxed{x_0 = 0 \text{ INFLEXIÓS PONT}}$

FÜGGVÉNYVIZSGÁLAT: f

$\mathcal{D}_f$, $\mathcal{R}_f$, ZÉRUSHELYEK, KRITIKUS PONTOK, LOKÁLIS/GLOBÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKEK, MONOTON SZAKASZOK, KONVEX/KONKÁV SZAKASZOK, INFLEXIÓS PONTOK, HATÁRÉRTÉKEK $\mathcal{D}_f$ SZÉLEIN

PÁROS? $f(-x)=f(x)$	PÁRATLAN? $f(-x)=-f(x)$

PL: $f(x)=e^{-x^2}$ $\quad \mathcal{D}_f=\mathbb{R}$, $\boxed{f(x)>0}$ $\Rightarrow$ ZÉRUSHELY NINCS

$f'(x)=-2x\cdot e^{-x^2}$ $\quad \boxed{f'(x)=0} \Longleftrightarrow \boxed{-2x=0} \Longleftrightarrow \boxed{x=0}$

TEHÁT: KRITIKUS PONT: $\boxed{x_0=0}$ ☆

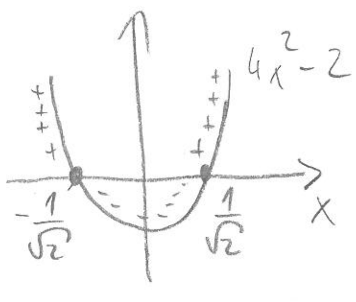
$x<0 \Rightarrow f'(x)>0 \Longrightarrow f \nearrow (-\infty,0]$-N

$x>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Longrightarrow f \searrow [0,\infty)$-N

$f''(x)=-2\cdot e^{-x^2}-2x\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x)=(4x^2-2)\cdot e^{-x^2}$

☆ $f''(0)=(4\cdot 0^2-2)\cdot e^{-0^2}=-2 \Longrightarrow \boxed{x_0=0}$ $\boxed{\text{LOKÁLIS MAXIMUM HELY}}$

$\boxed{f''(x)=0} \Longleftrightarrow 4x^2-2=0 \Longleftrightarrow \boxed{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$



f KONVEX $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$-N ÉS $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$-N

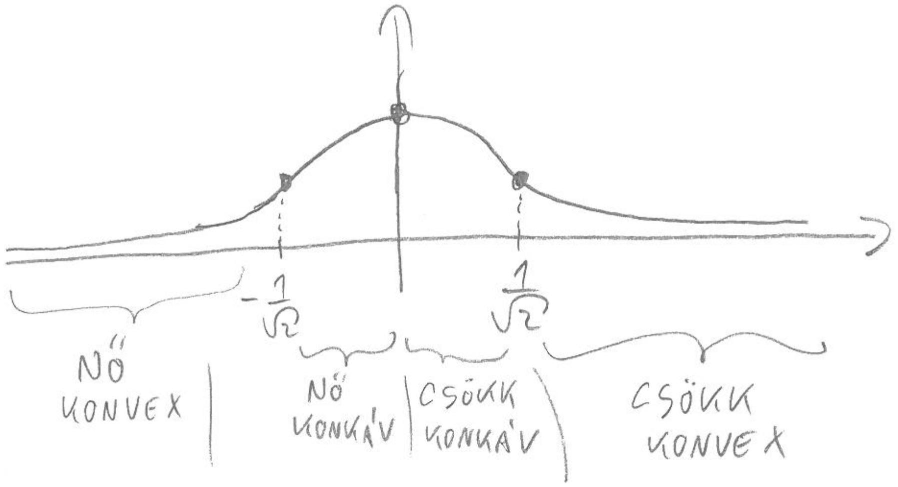
f KONKÁV $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$-N

88. OLDAL

INFLEXIÓS PONTOK: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(f'' ELŐJELET VÁLT)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0$$



$$\mathbb{R}_f = (0, 1]$$

PÁROS FÜGGVÉNY:

$$f(x) = e^{-x^2} = e^{-(-x)^2} = f(-x)$$

PL: $\boxed{f(x) = \frac{1}{1-x^2}}$ $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}}$ $\boxed{\text{ZÉRUSHELY: NINCS}}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(1-x^2)^2} \cdot (-2x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

KRITIKUS PONT: $f'(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff \boxed{x_0 = 0}$ (A)

$\boxed{x < 0} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f CSÖKKEN $(-\infty, -1)$-EN

f CSÖKKEN $(-1, 0]$-N

$\boxed{x > 0} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f NŐ $[0, 1)$-EN

f NŐ $(1, +\infty)$-EN

89. OLDAL

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{2\cdot(1-x^2)^2 - 2x\cdot 2\cdot(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{2\cdot(1-x^2) + 8x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$$

$f'(0)=0 \quad f''(0)=2>0$

$\boxed{x_0=0}$ LOK. MIN. HELY

$$f''(x)=0 \iff 6x^2+2=0 \implies$$ ILYEN VALÓS SZÁM NINCS

$\Rightarrow$ NINCS INFLEXIÓS PONT.

$f''(x)$ ELŐJELE: $\dfrac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$

SZÁMLÁLÓ POZITÍV

NEVEZŐ: POZ., HA $x^2<1$

NEG., HA $x^2>1$

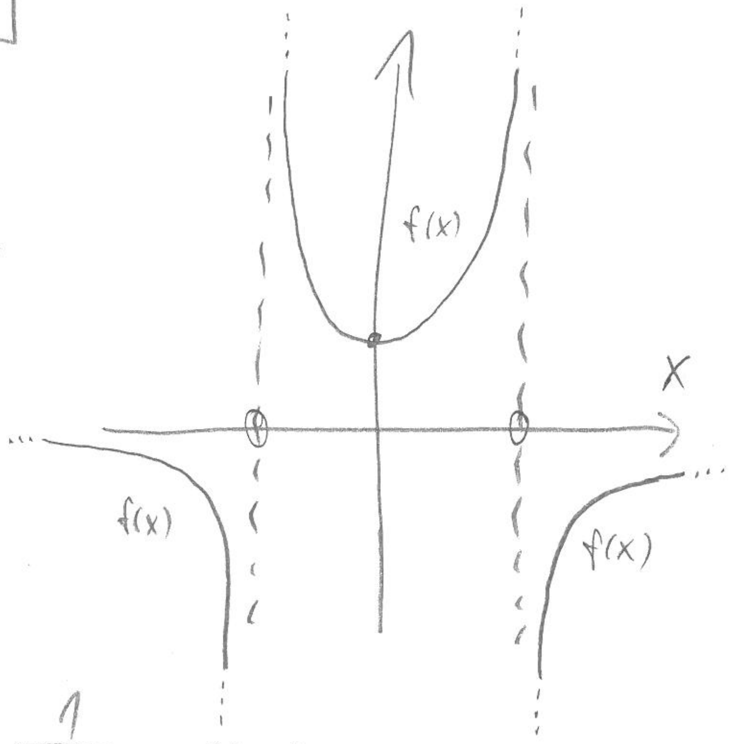
TEHÁT $f''(x)>0$ HA $\boxed{x\in(-1,1)}$ $\leftarrow$ ITT f KONVEX

$f''(x)<0$ HA $\boxed{\begin{matrix} x\in(-\infty,-1) \\ x\in(1,\infty)\end{matrix}}$ $\leftarrow$ ITT f KONKÁV

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to-1_-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-1_+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to1_-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to1_+} f(x) = -\infty$$



$$R_f = (-\infty,0)\cup[1,+\infty)$$

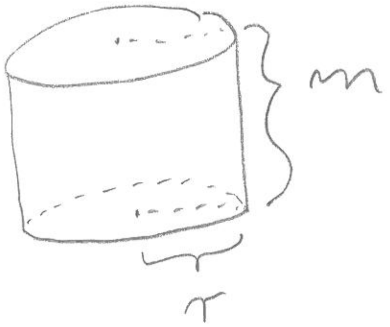
f PÁROS: $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-(-x)^2} = f(-x)$

90. OLDAL

SZÖVEGES SZÉLSŐÉRTÉK-FELADATOK:

PL: AZ 1000 CM² FELÜLETŰ KÖRHENGEREK KÖZÜL MELYIKNEK A LEGNAGYOBB A TÉRFOGATA?

$$\boxed{A = \underbrace{2\cdot r^2\cdot \pi}_{\text{ALJA+TETEJE}} + \underbrace{2\cdot r\cdot \pi\cdot m}_{\text{PALÁSTJA}} = 1000}$$



$$\boxed{V = r^2\cdot \pi\cdot m}$$

★ ÁTALAKÍTÁSÁVAL FEJEZZÜK KI m-ET r FÜGGVÉNYEKÉNT:

$$\boxed{m = \frac{1000 - 2\cdot r^2\cdot \pi}{2\cdot r\cdot \pi}}$$

ÍGY: $V(r) = r^2\cdot \pi\cdot m =$

$$= r^2\cdot \pi\cdot \frac{1000-2r^2\cdot \pi}{2\cdot r\cdot \pi} = r\cdot(500 - r^2\cdot \pi) =$$

$$= 500\cdot r - r^3\cdot \pi = V(r)$$

É.T.: $\boxed{r > 0}$

$$\boxed{V''(r) = -6\pi\cdot r} \Rightarrow \text{KONKÁV}$$

$$V'(r) = 500 - 3\cdot r^2\cdot \pi$$

$$\overset{?}{=}0 \quad 3\cdot r^2\cdot \pi = 500 \Rightarrow r = +\sqrt{\frac{500}{3\pi}} \approx 7.28$$

TEHÁT $\boxed{r = 7.28 \text{ CM}}$ $\boxed{m = 14.56 \text{ CM}}$

91. OLDAL