AZ f GLOBÁLIS MAXIMUMHELYE $x_0 \in \mathcal{D}_f$,

HA MINDEN $x \in \mathcal{D}_f$-RE $\boxed{f(x) \leq f(x_0)}$.

EKKOR f GLOBÁLIS MAXIMUMA $f(x_0)$.

(MÁS NÉVEN: ABSZOLÚT MAXIMUMA)

HASONLÓAN: MINIMUM.

AZ f LOKÁLIS MAXIMUMHELYE $x_0 \in \mathcal{D}_f$,

HA VAN OLYAN $\boxed{\varepsilon > 0}$, HOGY

MINDEN $\boxed{x \in \mathcal{D}_f \cap [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]}$ ESETÉN $\boxed{f(x) \leq f(x_0)}$

HASONLÓAN: MINIMUM.

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK = LOK. MAX. VAGY MIN.

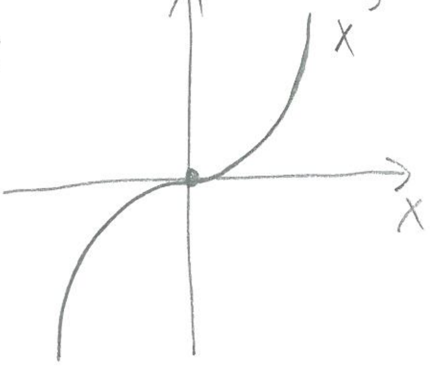
TÉTEL: HA f DIFF.HATÓ AZ x_0 PONTBAN

ÉS x_0 LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉKHELYE f-NEK,

AKKOR $\boxed{f'(x_0) = 0}$

FORDÍTVA NEM IGAZ!

PL.:



$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$, DE $\boxed{x_0 = 0}$ MÉGSEM

LOKÁLIS SZÉLSŐÉRTÉK-HELY!

DEF.: $\mathcal{D}_f = [a, b]$: AZ $x_0 \in (a, b)$ HELY

AZ f KRITIKUS PONTJA, HA $\boxed{f'(x_0) = 0}$

VAGY $f'(x_0)$ NEM LÉTEZIK

FELADAT: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ FOLYTONOS FÜGGVÉNY

MIK f SZÉLSŐÉRTÉKEI AZ $[a, b]$ ZÁRT INTERVALLUMON?

1. KERESSÜK MEG f KRITIKUS PONTJAIT

SZÉLSŐÉRTÉK-GYANÚS HELYEK:
KRITIKUS PONTOK & INTERVALLUM VÉGPONTJAI

2. SZÁMOLJUK KI f(x)-ET MINDEN SZÉLSŐÉRTÉK-GYANÚS x-RE
3. EZEN ÉRTÉKEK KÖZÜL A LEGNAGYOBB A GLOBÁLIS MAX, LEGKISEBBIK A GLOB. MIN.

PL.: $f(x) = x^3 - 6x^2$ GLOB MAX/MIN A $[-2, 2]$-N?

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x \cdot (x - 4)$

KRITIKUS PONTOK: $f'(x) = 0$, HA $\boxed{x = 0}$ VAGY $\boxed{x = 4}$

VISZONT $\boxed{x = 4}$ NEM ESIK BELE $[-2, 2]$-BE.

SZÉLSŐÉRTÉK-GYANÚS HELYEK:

$\boxed{x = -2}$ $\boxed{x = 0}$ $\boxed{x = 2}$

80. OLDAL

$f(x) = x^3 - 6x^2$

$f(-2) = (-2)^3 - 6\cdot(-2)^2 = -8 - 24 = -32 \leftarrow \boxed{\text{GLOB. MIN}}$

$f(0) = 0 \leftarrow \boxed{\text{GLOB. MAX}}$

$f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 = -16$

PL: $y = x\cdot\ln^2(x)$ HOL NÖVŐ, HOL CSÖKKENŐ?

$y' = x'\cdot\ln^2(x) + x\cdot(\ln^2(x))' = \ln^2(x) + x\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} =$

$= \ln(x)\cdot(\ln(x)+2) \leftarrow$ HOL POZ., HOL NEG.?

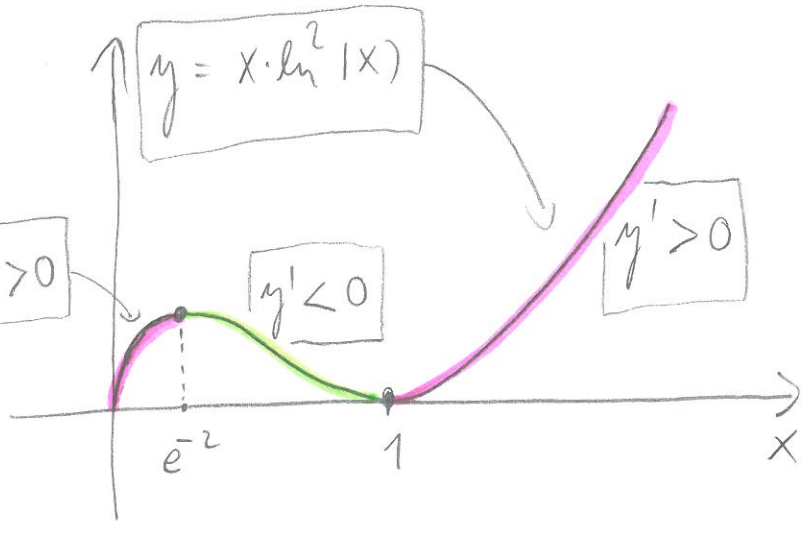
$y' = 0$, HA $\boxed{\ln(x) = 0}$ VAGY $\boxed{\ln(x) + 2 = 0}$

$\boxed{\ln(x) = 0} \to \boxed{x = 1}$, $\boxed{\ln(x) + 2 = 0} \to \boxed{x = e^{-2}}$

$\boxed{0 < x < e^{-2}} \Rightarrow \ln(x) < 0,\ \ln(x)+2 < 0 \Rightarrow \boxed{y' > 0}$

$\boxed{e^{-2} < x < 1} \Rightarrow \ln(x) < 0,\ \ln(x)+2 > 0 \Rightarrow \boxed{y' < 0}$

$\boxed{1 < x} \Rightarrow \ln(x) > 0,\ \ln(x)+2 > 0 \Rightarrow \boxed{y' > 0}$



PL: $f(x) = \dfrac{2x}{1+4x^2}$ HOL NŐ, CSÖKKEN?

$$f'(x) = \frac{(2x)' \cdot (1+4x^2) - 2x \cdot (1+4x^2)'}{(1+4x^2)^2} =$$

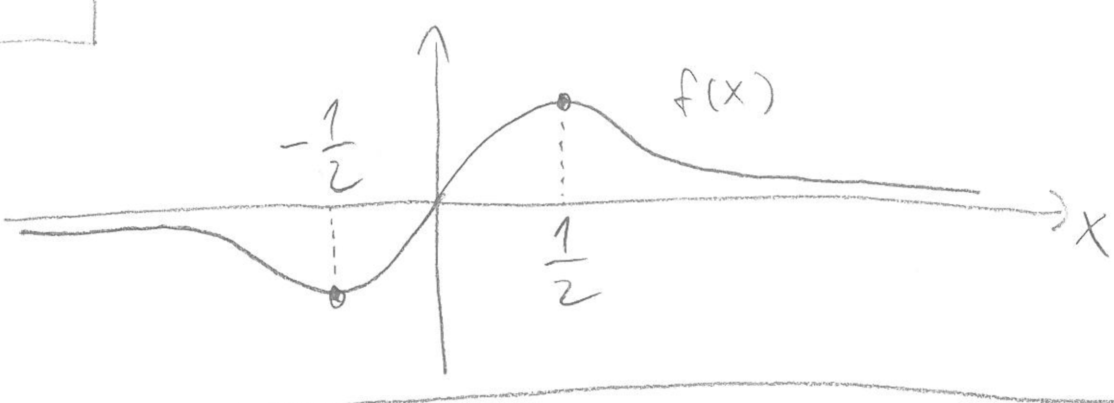
$$= \frac{2 \cdot (1+4x^2) - 16x^2}{(1+4x^2)^2} = 2 \cdot \frac{1-4x^2}{(1+4x^2)} \leftarrow \boxed{\text{HOL POZITÍV? HOL NEGATÍV?}}$$

$f'(x)$ HOL 0? $\quad 1-4x^2 = 0 \iff \boxed{x = \pm \frac{1}{2}}$

$\boxed{x < -\frac{1}{2}} \Rightarrow 1-4x^2 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ CSÖKK}}$

$\boxed{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}} \Rightarrow 1-4x^2 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ NŐ}}$

$\boxed{\frac{1}{2} < x} \Longrightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ CSÖKK}}$



DEF: f KONKÁV AZ [a, b] INTERVALLUMON,

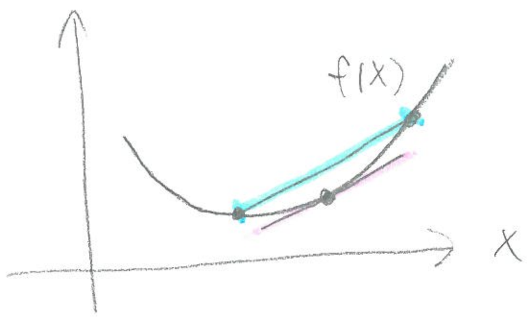
HA f' CSÖKKEN [a, b]-N.

f KONVEX AZ [a, b] INTERVALLUMON,

HA f' NŐ [a, b]-N.

82. OLDAL

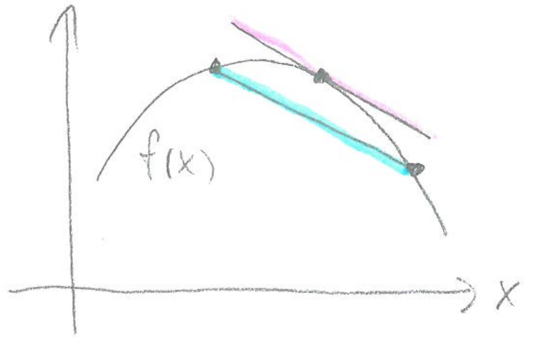
KONVEX: f' NŐ



f GRAFIKONJA A **SZELŐ** ALATT, AZ **ÉRINTŐ** FELETT

$\boxed{f'' \geq 0}$ EGY INTERVALLUMON $\Rightarrow$ f **KONVEX** OTT

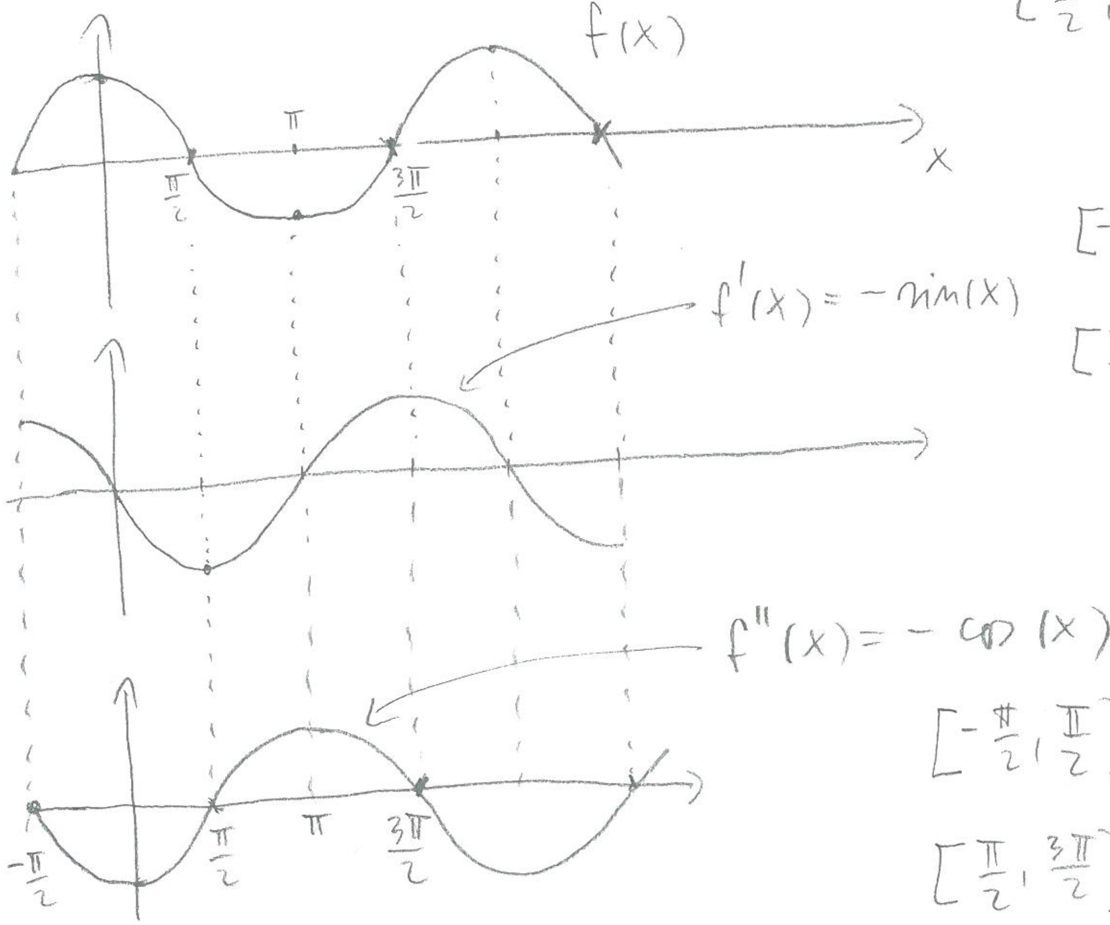
KONKÁV: f' CSÖKK



f GRAFIKONJA A **SZELŐ** FELETT, AZ **ÉRINTŐ** ALATT

$\boxed{f'' \leq 0}$ EGY INTERVALLUMON $\Rightarrow$ f **KONKÁV** OTT

PL: $f(x) = \cos(x)$



$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: f KONKÁV

$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$: f KONVEX

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: f' CSÖKK

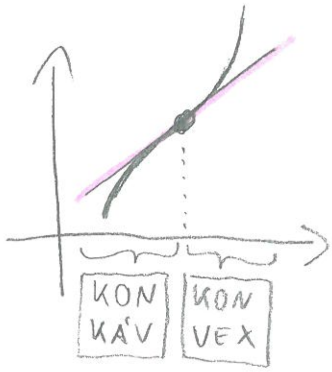
$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$: f' NŐ

$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $f'' \leq 0$

$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$: $f'' \geq 0$

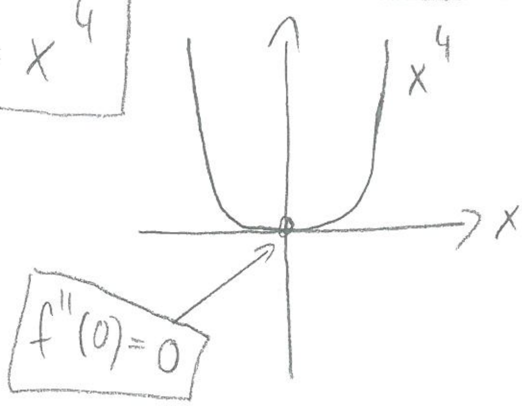
83. OLDAL

DEF: AZOKAT A PONTOKAT, AHOL f KONVEXBŐL KONKÁVBA VÁLT (VAGY FORDÍTVA) (AZAZ AHOL f'' ELŐJELET VÁLT), **INFLEXIÓS PONT**NAK HÍVJUK:



$\boxed{\text{INFLEXIÓS PONT } x_0} \Longrightarrow \boxed{f''(x_0)=0}$

FORDÍTVA NEM IGAZ: PL: $\boxed{f(x)=x^4}$



$f'(x)=4x^3 \quad f''(x)=12x^2$

$\boxed{f''(0)=0}$ DE $\boxed{x_0=0}$ NEM INFLEXIÓS PONT, f KONVEX

PL: $f(x)=x\cdot \ln^2(x)$ HOL KONVEX, KONKÁV?

$f'(x)=\ln(x)\cdot(\ln(x)+2)$ (LÁSD 81. OLDAL)

$f''(x)=\frac{1}{x}\cdot(\ln(x)+2)+\ln(x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{2}{x}\cdot(\ln(x)+1)$

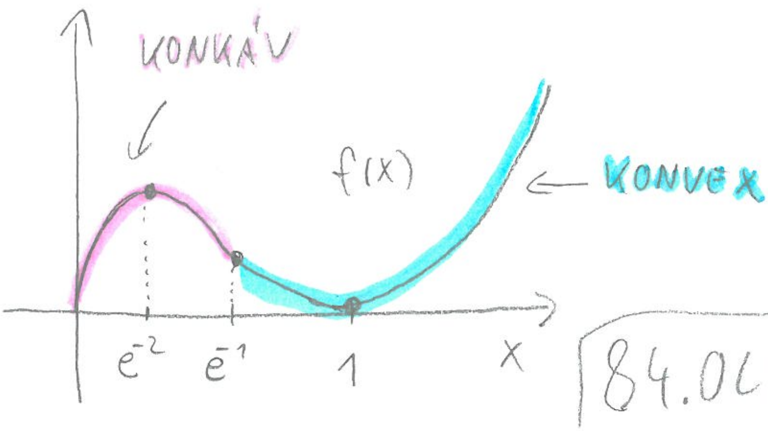
f'' HOL POZ, HOL NEG? f'' HOL 0?

$f''(x)=0 \Longleftrightarrow \ln(x)+1=0 \Longleftrightarrow \ln(x)=-1 \Longleftrightarrow \boxed{x=e^{-1}}$

$0<x<e^{-1} \Longrightarrow f''(x)<0$

$e^{-1}<x \Longrightarrow f''(x)>0$

$\boxed{x_0=\frac{1}{e}}$ INFLEXIÓS PONT



PL: $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ HOL NŐ, HOL CSÖKK, HOL KONVEX, HOL KONKÁV ?

$$f'(x) = x' \cdot e^{-x^2} + x \cdot \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) =$$

$$= e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right)$$

$$f'(x) = 0 \iff 1 - 2x^2 = 0 \iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\boxed{f'(x) > 0}$, HA $\boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{f'(x) < 0}$, HA $\boxed{x < -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x > \frac{1}{\sqrt{2}}}$

NŐ   CSÖKKEN

$$f''(x) = \left(e^{-x^2} \cdot (1-2x^2)\right)' = \left(e^{-x^2}\right)' \cdot (1-2x^2) + e^{-x^2} \cdot (1-2x^2)' =$$

$$= e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (1-2x^2) + e^{-x^2} \cdot (-4x) =$$

$$= e^{-x^2} \cdot x \cdot (4x^2 - 2) + e^{-x^2} \cdot x \cdot (-4) = x \cdot e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 6)$$

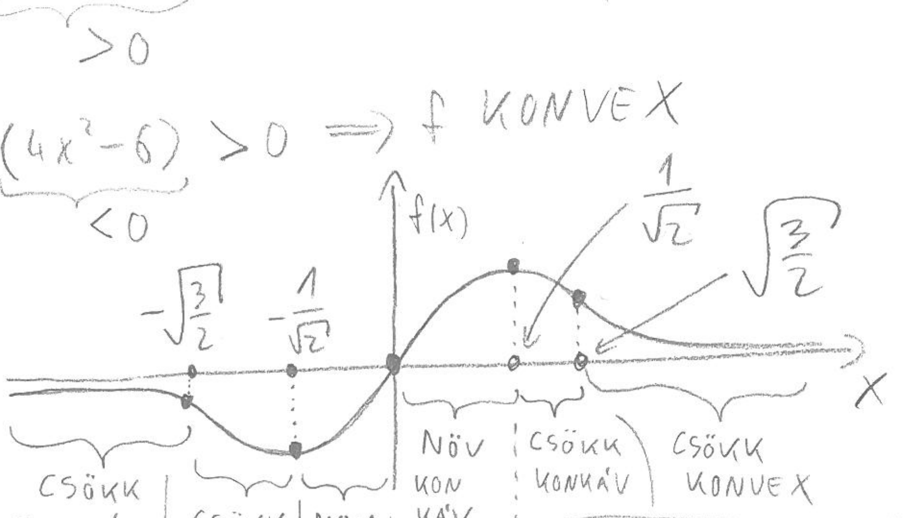
$f''(x) = 0$, HA $\boxed{x = 0}$ VAGY $\boxed{4x^2 - 6 = 0} \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$

$\boxed{x < -\sqrt{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \underbrace{x}_{<0} \cdot e^{-x^2} \cdot \underbrace{(4x^2 - 6)}_{>0} < 0 \Rightarrow f$ KONKÁV

$\boxed{-\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0} \Rightarrow \underbrace{x}_{<0} \cdot e^{-x^2} \cdot \underbrace{(4x^2 - 6)}_{<0} > 0 \Rightarrow f$ KONVEX

$\boxed{0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$ KONKÁV

$\boxed{\sqrt{\frac{3}{2}} < x} \Rightarrow$ KONVEX



85. OLDAL