L'HOSPITAL SZABÁLY:

LEGYEN $a \in \mathbb{R}$ VAGY $a = \pm\infty$

HA f, g DIFFNATÓAK ÉS $g'(x) \neq 0$ HA $x \neq a$, ÉS

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = 0 \ \& \ \lim_{x\to a} g(x) = 0} \leftarrow \boxed{\frac{0}{0} \text{ TÍPUSÚ LIMESZ}}$$

VAGY

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \ \& \ \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty} \leftarrow \boxed{\frac{\infty}{\infty} \text{ TÍPUSÚ LIMESZ}}$$

AKKOR $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}} \leftarrow$ HA AZ UTÓBBI LIMESZ LÉTEZIK ($\pm\infty$ IS LEHET)

PL: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2-x} = ?$ $\quad f(x) = 2x+1$, $g(x) = 2-x$ $\quad \boxed{\frac{\infty}{\infty} \text{ TÍPUSÚ}}$

$$? = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)'}{(2-x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{(-1)} = -2$$

PL: LÁSD 52. OLDAL TETEJE: $\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = ?$

$\boxed{\frac{0}{0} \text{ TÍPUSÚ}}$ LIMESZ

$$? = \lim_{x\to 5} \frac{(x^2-25)'}{(x-5)'} = \lim_{x\to 5} \frac{2x}{1} = 10$$

PL: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = ?$ $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty} \text{ TÍPUSÚ}}$

$? = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln'(x)}{(x-1)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

PL: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = ?$ $\left.\begin{array}{l} \ln(1)=0 \\ 1-1=0 \end{array}\right\} \dfrac{0}{0}$ TÍPUSÚ

$? = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1/x}{1} = \dfrac{1}{1} = 1$

PL: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = \dfrac{\ln(3)}{3-1} = \dfrac{\ln(3)}{2}$ IDE NEM KELLETT L'HOSPITAL!

PL: $\lim\limits_{x\to 0_+} x\cdot\ln(x) = ?$ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0_+} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0_+} \ln(x) = -\infty \end{array}\right\} \boxed{0\cdot\infty \text{ TÍPUSÚ}}$

$? = \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln(x)}{1/x} \overset{\frac{\infty}{\infty},\ \text{L'HOSPITAL}}{=\!=\!=\!=} \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln'(x)}{(1/x)'} =$

$= \lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0_+} (-x) = 0$

PL: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x+1\right)^{1/x} = A = ?$ $\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}x+1=\infty \\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\end{array}\right\}$ $\boxed{\infty^0 \text{ TÍPUSÚ LIMESZ}}$

TRÜKK: $\ln\left(\left(\frac{1}{2}x+1\right)^{1/x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

$$\ln(A) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{2}x+1\right)}{x} \underset{=}{\overset{\frac{\infty}{\infty},\ \text{L'HOSPITAL}}{=}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln'\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\frac{1}{2}}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1/2\,x+1}\cdot\frac{1}{2}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+2} = 0 \Rightarrow \boxed{\ln(A)=0} \Rightarrow \boxed{A=e^0=1}$$

PL: $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right) = ?$ $\qquad \begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{\sin(x)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x} = +\infty\end{array}$

TEHÁT ? EGY $\infty-\infty$ TÍPUSÚ LIMESZ.

TRÜKK: KÖZÖS NEVEZŐRE HOZZUK ŐKET:

$$? = \lim_{x\to 0+}\frac{x-\sin(x)}{\sin(x)\cdot x} \underset{=}{\overset{\frac{0}{0},\ \text{L'HOSPITAL}}{=}} \lim_{x\to 0+}\frac{(x-\sin(x))'}{(\sin(x)\cdot x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos(x)}{\cos(x)\cdot x+\sin(x)} \underset{=}{\overset{\frac{0}{0},\ \text{L'HOSPITAL}}{=}}$$

$\boxed{\text{74. OLDAL}}$

$$\star = \lim_{x \to 0+} \frac{(1-\cos(x))'}{(\cos(x)\cdot x + \sin(x))'} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{\cos'(x)\cdot x + \cos(x)\cdot 1 + \cos(x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{2\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot x} = \frac{0}{2\cdot 1 + 0\cdot 0} = 0$$

PL: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x^2} \underset{}{\overset{\frac{0}{0},\ \text{L'HOSPITAL}}{=\!=\!=}}$ ☺

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+x} = \left((1+x)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot(1+x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(1+x)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(1+x)^{-1/2}\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

☺ $= \lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 0 - \frac{1}{2}}{2x} \overset{\frac{0}{0},\ \text{L'HOSPITAL}}{=\!=\!=}$ ☹

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left((1+x)^{-1/2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(1+x)^{-3/2}$$

☹ $= \lim_{x \to 0} \dfrac{-1/4\cdot(1+x)^{-3/2} - 0}{2} = \dfrac{-1/4\cdot 1}{2} = -\dfrac{1}{8}$

HATÁROZZA MEG AZ A SZÁMOT ÚGY, HOGY

AZ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)}, & \text{HA } 0 < x < \sqrt{\pi} \\ A - \cos(x), & \text{HA } x \leq 0 \end{cases}$

FÜGGVÉNY FOLYTONOS LEGYEN!

<u>MEGOLDÁS:</u> $\mathcal{D}_f = (-\infty, 0] \cup (0, \sqrt{\pi})$

HA $x \in (0, \sqrt{\pi})$, AKKOR $\sin(x^2) \neq 0$, ÍGY

$f(x) = \sin^2(x)/\sin(x^2)$ FOLYTONOS $(0, \sqrt{\pi})$-N

$f(x) = A - \cos(x)$ FOLYTONOS $(-\infty, 0]$-N

AZ EGYETLEN PROBLÉMA f FOLYTONOSSÁGÁVAL

$\boxed{x = 0}$ - BAL LEHET. ÚGY KELL A-T MEGVÁLASZTANI,

HOGY $\boxed{\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x)}$ TELJESÜLJÖN.

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin^2(x)}{\sin(x^2)} \overset{\frac{0}{0}\ L'H}{=\!=} \lim_{x \to 0+} \frac{2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)}{\cos(x^2) \cdot 2x} =$$

$$\overset{\frac{0}{0}\ L'H}{=\!=} \lim_{x \to 0+} \frac{2 \cdot \cos^2(x) - 2 \cdot \sin^2(x)}{-\sin(x^2) \cdot (2x)^2 + \cos(x^2) \cdot 2} = \frac{2 \cdot 1 - 2 \cdot 0}{-0 + 2} = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} A - \cos(x) = A - 1$$

KELL: $\boxed{A - 1 = 1} \Longrightarrow \boxed{A = 2}$ ✓

MAGASABBRENDŰ DERIVÁLTAK:

HA $\boxed{g = f'}$ ÉS $\boxed{h = g'}$, AKKOR AZT MONDJUK, HOGY h AZ AZ f MÁSODIK DERIVÁLTJA

JEL: $\boxed{h = f''}$ $\boxed{h = \frac{d^2}{dx^2} f}$

PL: $y(t)$ = A RAKÉTA MAGASSÁGA t-KOR

$v(t) = \frac{d}{dt} y(t) = y'(t)$ = A RAKÉTA SEBESSÉGE t-KOR

$v'(t) = \frac{d^2}{dt^2} y(t) = y''(t)$ = A RAKÉTA GYORSULÁSA t-KOR

HARMADIK DERIVÁLT: $\frac{d}{dx} f''(x) = \left(f''\right)'(x) = f'''(x)$

A MÁSODIK DERIVÁLT DERIVÁLTJA.

---

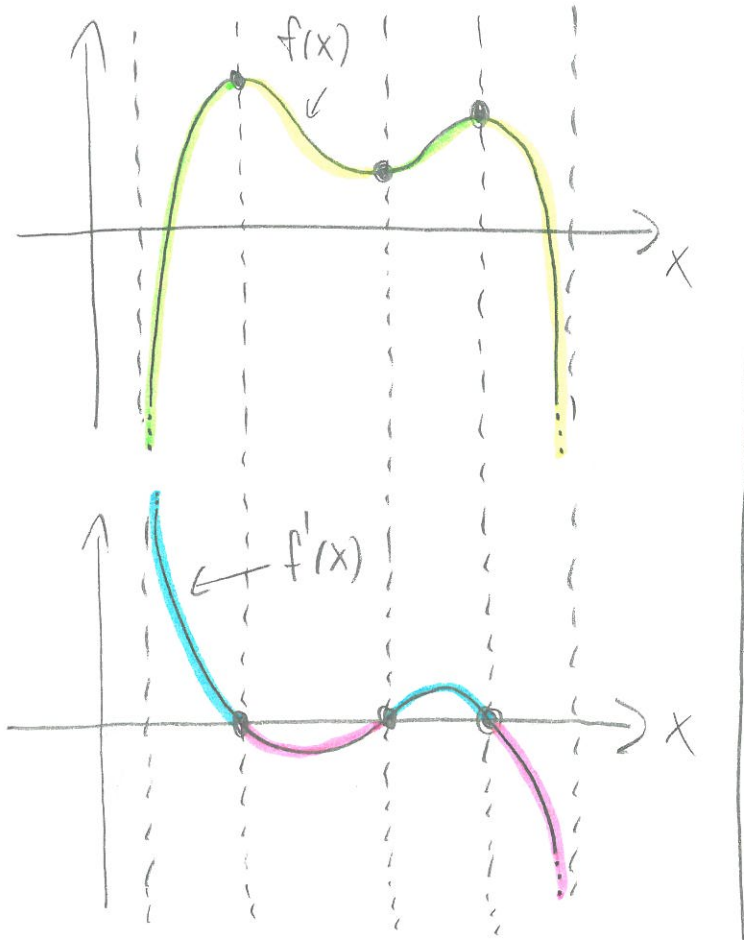
n-EDIK DERIVÁLT: $f^{(n)}(x) = \left(\frac{d^n}{dx^n} f\right)(x)$

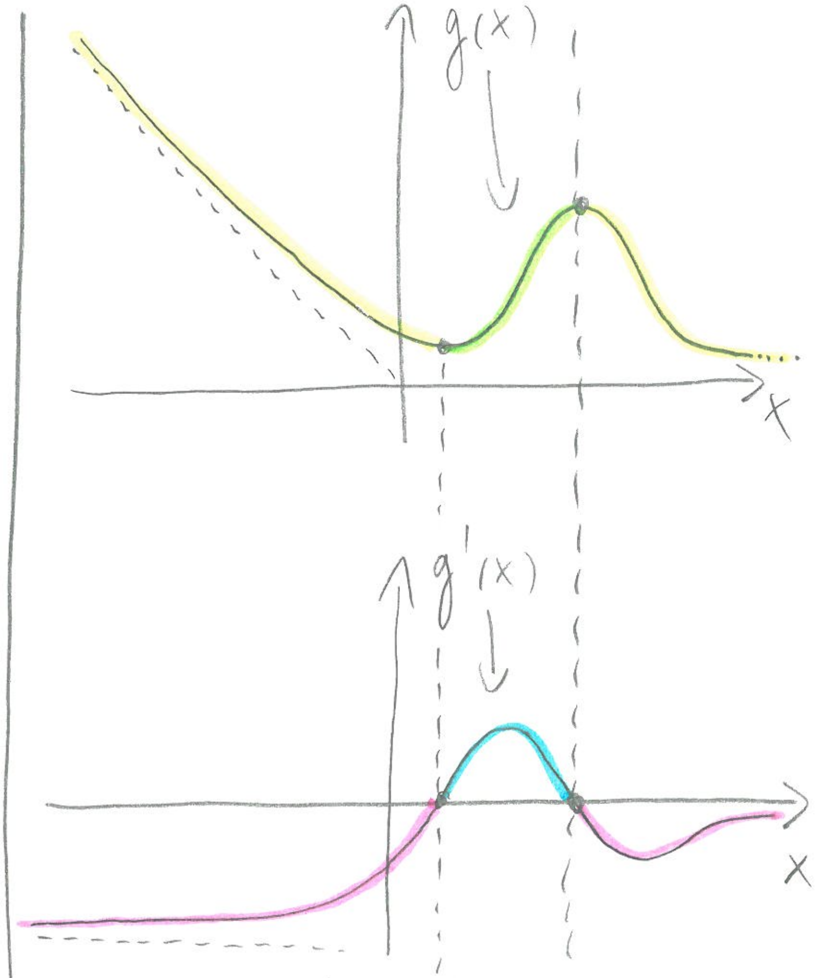
PL: $y = x^4 + \cos(2x) \Rightarrow y' = 4x^3 - 2\cdot\sin(2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y'' = 12x^2 - 4\cdot\cos(2x) \Rightarrow y''' = 24x + 8\cdot\sin(2x)$

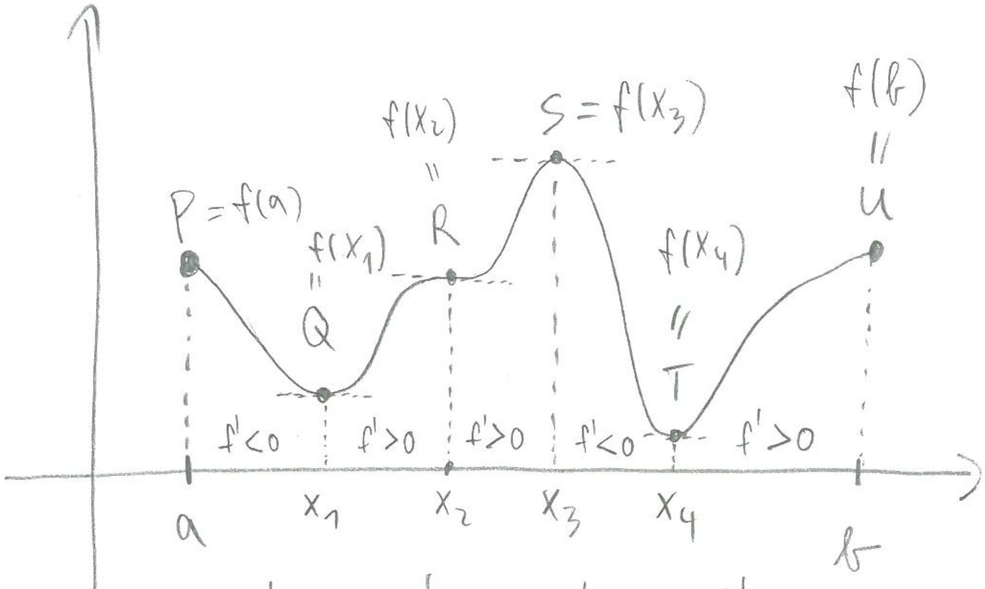
$f'(x) > 0 \Longrightarrow$ f LOKÁLISAN NŐ x-BEN

$f'(x) < 0 \Longrightarrow$ f LOKÁLISAN CSÖKKEN x-BEN





SZÉLSŐÉRTÉKEK: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$



P: LOKÁLIS MAX

Q: LOK. MIN

R: NINCS SZÉLSŐÉRTÉK

S: GLOBÁLIS MAX

T: GLOBÁLIS MIN

U: LOK. MAX

$f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_3) = f'(x_4) = 0$