KOMPLEX SZÁMOK:

$\boxed{x^2+1=0} \Longleftrightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{-1}}$ ← NINCS ILYEN VALÓS SZÁM!

DEF: KÉPZETES EGYSÉG: i: $\boxed{i^2=-1}$

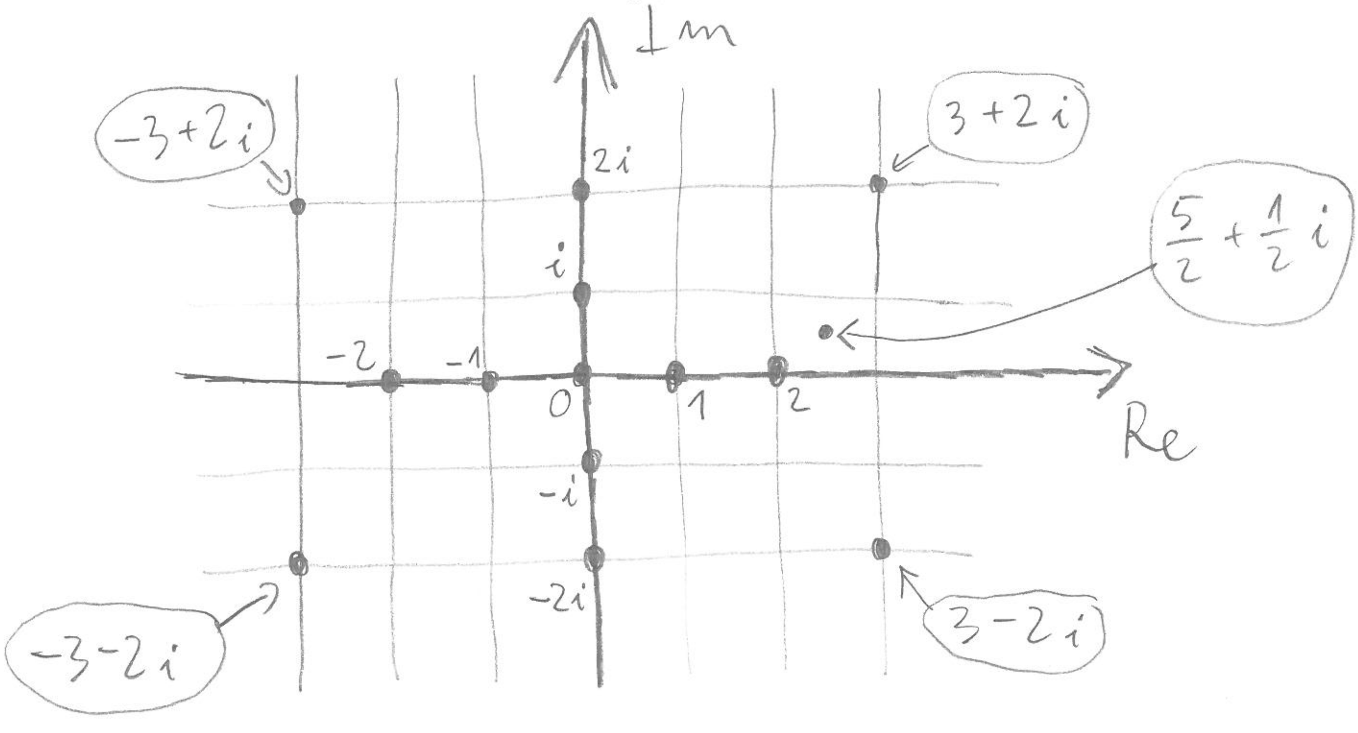
KOMPLEX SZÁM ALGEBRAI ALAKJA:

$\boxed{z=a+b\cdot i}$ (AHOL a ÉS b VALÓS SZÁMOK)

$\boxed{a=\mathrm{Re}(z)}$: z VALÓS RÉSZE a

$\boxed{b=\mathrm{Im}(z)}$: z KÉPZETES RÉSZE b

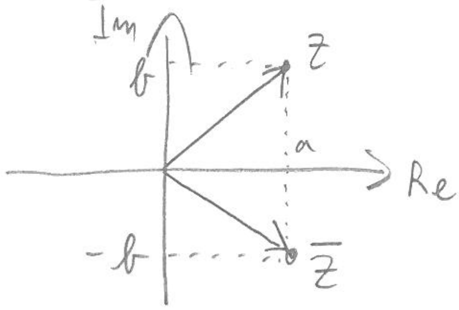
VALÓS SZÁMEGYENES, KOMPLEX SZÁMSÍK:



HA $\boxed{z=a+b\cdot i}$, AKKOR z KONJUGÁLTJA:

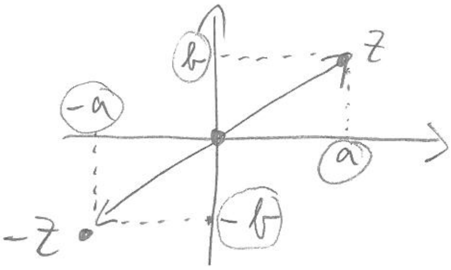
$\boxed{\overline{z}=a-bi}$ PL: $\boxed{\overline{-5}=-5}$ $\boxed{\overline{i}=-i}$

$\boxed{\overline{-i}=i}$ $\boxed{\overline{3-2i}=3+2i}$



KONJUGÁLÁS: TÜKRÖZÉS A VALÓS SZÁMEGYENESRE

$\boxed{z=a+bi} \Rightarrow \boxed{-z=-a-bi}$



KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS AZ ORIGÓRA

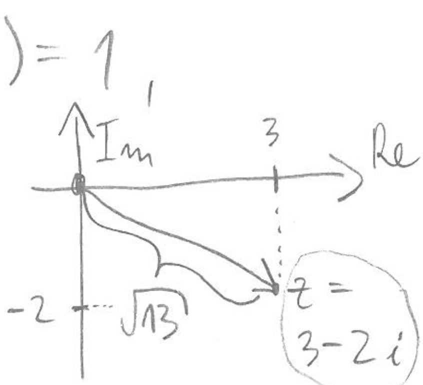
$\boxed{z=a+b\cdot i}$ KOMPLEX SZÁM NAGYSÁGA:

(ABSZOLÚT ÉRTÉKE): $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$|z|=\sqrt{Re(z)^2+Im^2(z)}$ $\boxed{|z|\geq 0}$

Pl: $\boxed{i=0+1\cdot i}$, $Re(i)=0$, $Im(i)=1$,

$|i|=\sqrt{0^2+1^2}=1$



Pl: $|3-2i|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$:

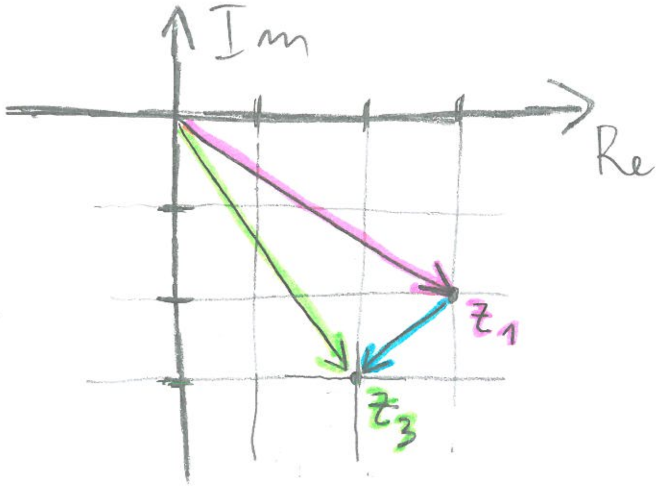
(PITHAGORASZ-TÉTEL)

MŰVELETEK:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) \pm (a_2 + i \cdot b_2) =$$

$$= (a_1 \pm a_2) + i \cdot (b_1 \pm b_2)$$

PL: $\underbrace{(3-2i)}_{z_1} + \underbrace{(-1-i)}_{z_2} = 2-3i = z_1 + z_2 = z_3$



i HATVÁNYAI: $\boxed{i^2 = -1}$ $\boxed{i^3 = -i}$ $\boxed{i^4 = 1}$

$\boxed{i^5 = i}$ $\boxed{i^6 = -1}$ $\boxed{i^7 = -i}$ $\boxed{i^8 = 1}$ STB

SZORZÁS:

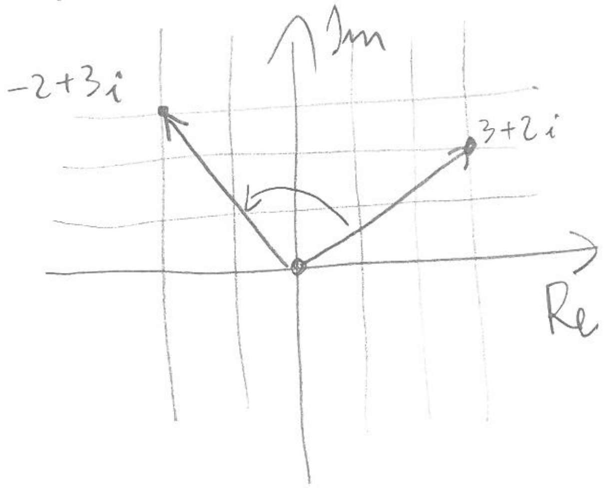
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) \cdot (a_2 + i \cdot b_2) =$$

$$= a_1 \cdot a_2 + i \cdot b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot i \cdot b_2 + i \cdot b_1 \cdot i \cdot b_2 =$$

$$= a_1 \cdot a_2 + i \cdot (b_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2) + \underbrace{(i)^2}_{=-1} \cdot b_1 \cdot b_2 =$$

$$= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$$

PL: $(3+2\cdot i)\cdot i = 3i + 2i^2 = -2 + 3\cdot i$



I-VEL VALÓ SZORZÁS = 90°-AL BALRA FORGATÁS

OSZTÁS: VALÓS SZÁMMAL:

$$\frac{z}{3} = \frac{a+b\cdot i}{3} = \frac{a}{3} + i\cdot\frac{b}{3} \quad \checkmark$$

TRÜKK: $z\cdot\overline{z} = (a+b\cdot i)\cdot(a-b\cdot i) =$

$= a^2 + abi - abi - b^2\cdot i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

OSZTÁS: KOMPLEX SZÁMMAL:

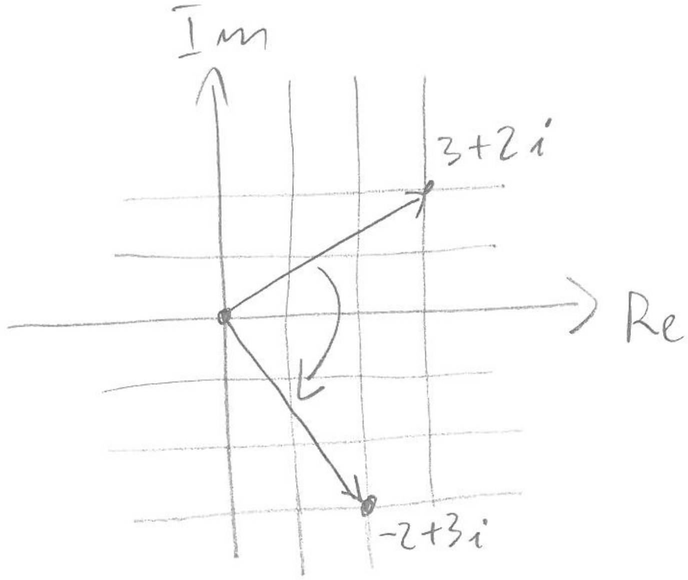
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}} =$$

MIND A SZÁMLÁLÓT, MIND A NEVEZŐT SZOROZZUK BE A NEVEZŐ KONJUGÁLTJÁVAL

$$= \frac{(a_1+i\cdot b_1)\cdot(a_2-i\cdot b_2)}{a_2^2+b_2^2} = \frac{(a_1\cdot a_2 + b_1\cdot b_2) + i\cdot(b_1\cdot a_2 - a_1\cdot b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

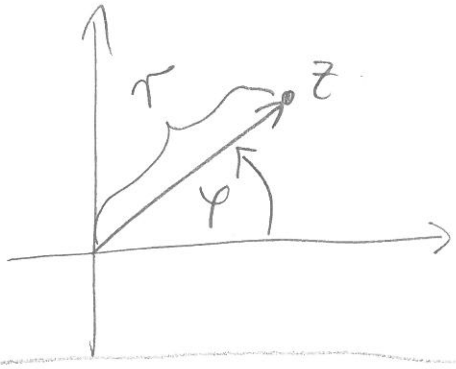
TRÜKK MIATT!

PL: $\frac{3+2i}{i} = \frac{(3+2i)\cdot(-i)}{\underbrace{i\cdot(-i)}_{=1}} = \frac{-3i-2i^2}{1} = 2-3i$



$\boxed{\text{i-VEL VALÓ OSZTÁS = 90°-AL JOBBRA FORGATÁS}}$

TRIGONOMETRIKUS ALAK:



$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\boxed{\varphi = \mathrm{Arg}(z)}$ ← $\boxed{\text{z KOMPLEX SZÁM ARGUMENTUMA}}$

PL: $\mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ (AZAZ 90°)

$\mathrm{Arg}(3) = 0$ $\mathrm{Arg}(-3) = \pi$ (AZAZ 180°)

$\mathrm{Arg}\left(-\frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2}\pi$ (AZAZ 270°)

HA MEGVAN A TRIG. ALAKJA z-NEK, AKKOR MI AZ ALGEBRAI ALAKJA?

$\boxed{a = r\cdot\cos(\varphi)}$ $\boxed{b = r\cdot\sin(\varphi)}$

TRÜKK: $\frac{z}{|z|} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

ÍGY KÖNNYŰ MEGTALÁLNI A φ SZÖGET!

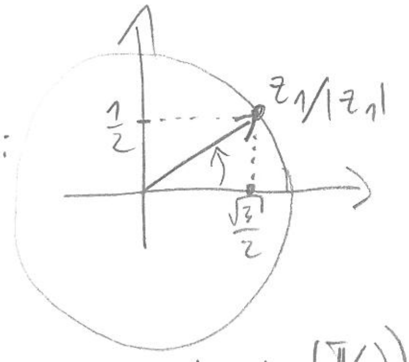
PL: $\boxed{z_1 = \sqrt{3} + i}$ $\boxed{z_2 = -1 + i}$ $\boxed{\text{TRIG. ALAK?}}$

$$r_1 = |z_1| = \left(\sqrt{3}^2 + 1^2\right)^{1/2} = 4^{1/2} = 2$$

$$\frac{z_1}{|z_1|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \underset{\text{TRÜKK}}{=\!=} \cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)$$

30^0, AZAZ $\pi/6$

RAJZ:



$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

TEHÁT $\boxed{\varphi_1 = \pi/6}$

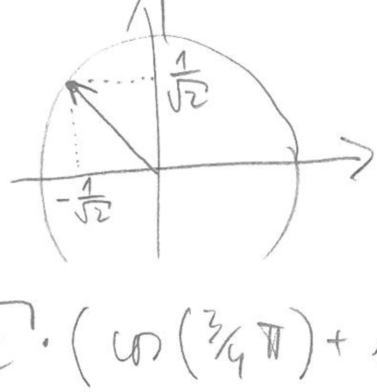
$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos(\pi/6) + i \cdot \sin(\pi/6)\right)$$

$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{z_2}{|z_2|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2)$$

135^0, AZAZ $\frac{3}{4}\pi$

RAJZ:



$$\left.\begin{array}{l} \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \boxed{\varphi_2 = \frac{3}{4}\pi}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)$$

MIÉRT JÓ A TRIGONOMETRIKUS ALAK?

SZOROZNI, OSZTANI, HATVÁNYOZNI KÖNNYŰ VELE:

HA $\boxed{z_3 = z_1 \cdot z_2}$, AKKOR $\boxed{r_3 = r_1 \cdot r_2}$ $\boxed{\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2}$

MIÉRT?

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot [\underbrace{(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1 + \varphi_2)} + i \cdot \underbrace{(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_1)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}]$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$\boxed{z_3 = z_1 / z_2} \Rightarrow \boxed{r_3 = r_1 / r_2}$, $\boxed{\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2}$

HATVÁNYOZÁS: $\boxed{\hat{z} = z^n} \Rightarrow \boxed{\hat{r} = r^n}$ $\boxed{\hat{\varphi} = n \cdot \varphi}$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

NEGATÍV n-RE IS MŰKÖDIK:

$$z^{-1} = r^{-1} \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi))$$

$$= \frac{1}{r} \cdot (\cos(\varphi) - i \cdot \sin(\varphi))$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{Arg}(z)$$

GYÖKVONÁS: $\sqrt[3]{-27} = ?$ AZAZ:

MELYIK z SZÁM OLDJA MEG A $\boxed{z^3 = -27}$ EGYENLETET?

HÁROM ILYEN SZÁM LESZ! $\boxed{z_0, z_1, z_2}$

$\boxed{|-27| = 27}$ $\boxed{\mathrm{Arg}(-27) = \pi}$

$\boxed{z^3 = -27} \Rightarrow |z|^3 = 27 \Rightarrow |z| = \sqrt[3]{27} = 3$

$\Rightarrow 3 \cdot \mathrm{Arg}(z) = \pi$ TEHÁT LEGYEN

$$z_0 = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2} + i \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

DE EZ MÉG CSAK EGY A HÁROM KÖZÜL!

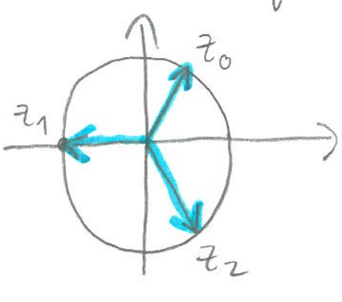
$$z_1 = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right) = -3$$

HISZEN $\mathrm{Arg}(z_1^3) = 3 \cdot \left(\frac{\pi}{3} + 1 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \pi + 2\pi = \pi$

(HISZEN $2\pi = 360°$, AZAZ KÖRBEÉRTEM)

$$z_2 = 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2} - i \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

HISZEN $\mathrm{Arg}(z_2^3) = 3 \cdot \left(\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \pi + 4\pi = \pi$



7 ÉS FELEDIK OLD.

ÁLTALÁBAN IS: $\sqrt[n]{z} = ?$

n DARAB OLYAN KOMPLEX SZÁM VAN, AMI MEGOLDJA EZT AZ EGYENLETET: $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$, AZAZ z_j, $0 \leq j \leq n-1$

HA $z = r\cdot(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi))$, AKKOR

$$z_j = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + j\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n} + j\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

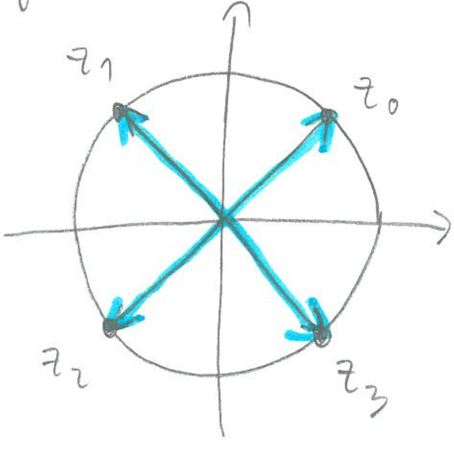
TEHÁT $\boxed{z_j^n = z}$ $j = 0, 1, \dots, n-1$

PL: $\sqrt[4]{-4} = ?$ $z = -4 = 4\cdot(\cos(\pi) + i\cdot\sin(\pi))$

TEHÁT $\boxed{r = 4}$ $\boxed{\varphi = \pi}$ $\Rightarrow \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

$$z_j = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + j\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + j\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$j = 0, 1, 2, 3$



$\boxed{z_0 = 1 + i}$ $\boxed{z_1 = -1 + i}$

$\boxed{z_2 = -1 - i}$ $\boxed{z_3 = 1 - i}$

7 ÉS 3/4-EDIK OLD.