Pólya–Szegő szeminárium 3.
8. feladatsor
2005. április 25.

1. Egy n pozitív egész számot bővelkedőnek nevezünk, ha pozitív osztóinak összege nagyobb, mint $2n$. Bizonyítsuk be, hogy ha a bővelkedő, b pedig tetszőleges pozitív egész, akkor ab is bővelkedő.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy racionális függvény végtelen sok egész helyen egész számot vesz fel, akkor polinom.

3. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2n-2} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2n-2} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

ahol $\varepsilon = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$.

4. Legyen $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z^1 + a_0$ tetszőleges komplex polinom ($a_n \neq 0$).

Lássuk be, hogy az $|a_n|x^n - |a_{n-1}|x^{n-1} - \cdots - |a_1|x - |a_0|$ polinomnak egyetlen nemnegatív gyöke van, legyen ez M.

Lássuk be, hogy az $|a_n|x^n + |a_{n-1}|x^{n-1} + \cdots + |a_1|x - |a_0|$ polinomnak egyetlen nemnegatív gyöke van, legyen ez m.

Igazoljuk, hogy az $f(z)$ polinom gyökeinek abszolút értéke az $[m, M]$ intervallumban van.

5. Hány olyan $2n$ hosszú 0-1 sorozat van, amiben az egyesek száma nem haladja meg a nullák számát az első k tag között semmilyen $1 \leq k \leq 2n$-re?

6. Mutassunk olyan komplex z_n sorozatot, hogy minden $1 \leq k$ egészre $z_1^k + \cdots + z_n^k + \ldots$ konvergens, de $|z_1|^k + \cdots + |z_n|^k + \ldots$ divergens.