Pólya–Szegő szeminárium 3.
7. feladatsor
2005. április 18.

1. Az $1, 2, \ldots, n$ számok közül melyek azok, amelyek relatív prímek az összes többihez?

2. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész előáll olyan összegként, ami legfeljebb öt tagú, és minden tag egy köbszám vagy annak ellentettje.

3. Legyen A $m \times n$-es mátrix, $m \geq n$. Mutassuk meg, hogy AA^T sajátértékei éppen $A^T A$ sajátértékei és még $m - n$ darab 0.

4. Legyen a_n pozitív, monoton csökkenő, nullához tartó sorozat. Legyen ϑ valós szám, melyre $\vartheta/(2\pi)$ nem egész. Lássuk be, hogy a következő sor konvergens:

$$\sum_{1 \leq n} e^{n\vartheta i} a_n$$

5. Van-e olyan $P \subseteq \mathbb{R}$ halmaz, ami mindenütt sűrű, nullmértékű és előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként?

6. Mutassuk meg, hogy ha p páratlan prím, akkor a $T_p(x)$ Csebisev-polinom együtthatói a főegyüttható kivételével oszthatóak p-vel.