Pólya–Szegő szeminárium 3.
5. feladatsor
2005. április 4.

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

polinomnak nincsenek többszörös gyökei.

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges ε pozitív számhoz található olyan n_0 küszöbindex, hogy $n > n_0$ esetén

$$\varphi(n) > n^{1-\varepsilon}.$$

3. Tegyük fel, hogy az a_k monoton növő pozitív sorozat végtelenbe tart. Legyen

$$\lambda = \limsup_{m\to\infty} \frac{\log m}{\log a_m}$$

Lássuk be, hogy az

$$a_1^{-\sigma} + a_2^{-\sigma} + \cdots + a_k^{-\sigma} + \ldots$$

sor minden $\sigma > \lambda$ esetén konvergens, de minden $\sigma < \lambda$ esetén divergens.

4. Lehet-e $\mathbb{R}$ egy pozitív mértékű A részhalmazának torlódási pontjainak halmaza nullmértékű?

5. Hozzuk zárt alakra az alábbi összeget ($n \geq 0$ egész).

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

6. Mi az olyan fák száma a $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$ csúcsokon, melyekben minden él egy v_i-t köt össze egy w_j-vel?