Pólya–Szegő szeminárium 3.
4. feladatsor, javított változat
2005. március 21.

1. Tegyük fel, hogy a $z_1, \dots, z_k, \dots$ komplex számsorozat tagjai mind a $-\alpha \le \arg z_k \le \alpha$ szögtartományba esnek valamilyen rögzített $\alpha < \pi/2$ számra. Lássuk be, hogy a $z_1 + \dots + z_k + \dots$ és a $|z_1| + \dots + |z_k| + \dots$ sorok egyszerre konvergensek vagy divergensek.

2. Tegyük fel, hogy a $z_1, \dots, z_k, \dots$ komplex számsorozat tagjai mind a $0 \le \mathrm{Re}(z)$ félsíkba esnek. Lássuk be, hogy ha a $z_1 + \dots + z_k + \dots$ és a $z_1^2 + \dots + z_k^2 + \dots$ sorok konvergensek, akkor $|z_1|^2 + \dots + |z_k|^2 + \dots$ is az.

3. Tegyük fel, hogy $0 < a_{kl}$ minden $1 \le k, l \le n$ egészre. Legyen $b_k = a_{k1} + \dots + a_{kn}$, és $c_l = a_{1l} + \dots + a_{nl}$, továbbá

$$V = \sum_k \max(0, b_k - c_k)$$
$$U = \sum_{k \ne l} a_{kl}$$

(a) Lássuk be, hogy $V \le U$.

(b) Lássuk be, hogy ha adottak a $0 \le b_1, \dots b_n, c_1, \dots, c_n$ számok, ahol $b_1 + \dots + b_n = c_1 + \dots + c_n$, akkor mindig meg lehet adni az a_{kl} számokat a fenti feltételek mellett úgy is, hogy $U = V$ álljon.

4. Legyen A egy $n \times n$-es négyzetes mátrix, E az egységmátrix. Legyen az $A - z \cdot E$ mátrix determinánsa $\chi(z)$, ugyanennek $n-1$ rendű aldeterminánsai pedig $\chi_{kl}(z)$, ha a k indexű sort és az l indexű oszlopot hagytuk el. A $\chi(z)$ polinom gyökeit jelölje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Lássuk be, hogy a $(\chi_{kl}(z))_{k,l=1,\dots,n}$ mátrix sajátértékei

$$\frac{\chi(z)}{\alpha_m - z} \quad (m = 1, \dots, n)$$

5. (a) Vegyünk egy konvex testet a 3-térben. Legyen a test vetülete a koordinátatengelyekre X, Y, illetve Z hosszúságú. A test térfogata V. Lássuk be, hogy

$$\frac{XYZ}{6} \le V \le XYZ$$

Bizonyítsuk, hogy a becslés éles.

(b) Legyen a 3-térben egy test olyan tulajdonságú, hogy szakaszban vagy pontban (vagy az üres halmazban) metsz minden, a koordinátatengelyek bármelyikével párhuzamos egyenest. Legyen a test vetülete a koordinátasíkokra P, Q, illetve R területű. Legyen a test felszíne A. Lássuk be, hogy

$$2\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \le A \le 2(P + Q + R)$$

Igazoljuk, hogy a becslés éles.