

Pólya–Szegő szeminárium 3.

3. feladatsor

2005. március 7.

1. Lássuk be, hogy $\varphi(n) + d(n) \leq n + 1$ minden n pozitív egészre. Milyen n -ekre áll egyenlőség?

2. Bizonyítsuk be, hogy bármely $p(x)$ polinomnak van olyan $p(x)q(x)$ (nullától különböző) többszöröse, amelyben csak x prím kitevőjű hatványai szerepelnek.

3. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

integrált.

4. Tegyük fel, hogy a $|z_1| + \dots + |z_n| + \dots$ sor divergens. Lássuk be, hogy van olyan α irányszög, hogy bármely $0 < \varepsilon$ -ra a z_1, \dots, z_n, \dots sor tagjai közül azoknak, amelyek irányszöge $\alpha - \varepsilon$ és $\alpha + \varepsilon$ közé esik, divergens az összege.

5. Legyenek az A és B $n \times n$ -es valós mátrixok, $AB = I$. Mutassuk meg, hogy ha az A mátrix elemei nemnegatív számok, akkor B elemei között legalább n pozitív és legalább n negatív szám van.

6. Tegyük fel, hogy az $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ polinom minden gyöke valós. Lássuk be, hogy ekkor a gyökök benne vannak a

$$-\frac{a_{n-1}}{n} \pm \frac{n-1}{n} \sqrt{a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_{n-2}}$$

végpontú intervallumban.