Pólya–Szegő szeminárium 3.
1. feladatsor
2005. február 14.

1. Bizonyítsuk be, hogy $\sigma(n)$ (az n természetes szám pozitív osztóinak összege) pontosan akkor páratlan, ha n négyzetszám vagy egy négyzetszám kétszerese.

2. Jelölje C a szokásos Cantor-halmazt ($C \subset [0,1]$). Bizonyítsuk be, hogy minden $x \in [0,2]$ előáll $y+z$ alakban, ahol $y, z \in C$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $A^2 = I$, ahol A $n \times n$-es mátrix, akkor az $I + A$ és $I - A$ mátrixok rangjának összege n.

4. Mutassuk meg, hogy ha a K_n teljes gráf éleit $m > 1$ számú teljes részgráfra bontjuk fel, akkor $m \geq n$.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots(1-x^n)\cdots$$

végtelen sorozatot sorba fejtjük, akkor csak a $(-1)^k x^{\frac{3k^2 \pm k}{2}}$ (ahol $k = 0, 1, 2, \ldots$) tagok lesznek 0-tól különbözőek. (Euler tétele.)

6. $\varphi(x)$ tetszőleges, $x \geq 0$-ra értelmezett, monoton növő függvény. Adjunk meg hozzá olyan $g(z)$ egész függvényt, ami valós z-re valós értéket vesz fel, és $x \geq 0$-ra $g(x) > \varphi(x)$. (Azaz léteznek egy félegyenes mentén tetszőlegesen gyorsan növő egész függvények.)