Pólya–Szegő szeminárium 3.
0. feladatsor
2005. február 7.

1. Tegyük fel, hogy egy valós sor nem konvergens, és nem tart plusz vagy mínusz végtelenhez, de az általános tag nullához tart. Lássuk be, hogy a sorösszegek torlódási pontjai (véges vagy végtelen) intervallumot alkotnak.

2. Adjunk meg végtelen sok (m, n) számpárt úgy, hogy az m, n különböző egész számoknak ugyanazok legyenek a prímosztói, és az $m+1$, $n+1$ számoknak is ugyanazok legyenek a prímosztói.

3. Legyenek adva a $0 \le p_{nk}$ számok minden $0 \le k \le n$ egészre oly módon, hogy $1 = p_{n0} + p_{n1} + \ldots + p_{nn}$. Ezek az s_n sorozatból a t_n sorozatot állítják elő a következőképpen: $t_n = p_{n0}s_0 + p_{n1}s_1 + \ldots + p_{nn}s_n$ bármely $0 \le n$ egészre.

Azt mondjuk, hogy ez a transzformáció reguláris, ha minden s_n sorozatra az s_n és a t_n sorozatok egyszerre konvergensek vagy divergensek, és ha konvergensek, akkor egyenlő a határértékük. Bizonyítsuk be, hogy a transzformáció akkor és csak akkor reguláris, ha minden k-ra $0 = \lim_{n\to\infty} p_{nk}$.

4. a) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a, b pozitív egész számokból álló pár van, amelyre a osztója (b^2+b+1)-nek, és b osztója (a^2+a+1)-nek.
b) Adjuk meg az összes ilyen párt.

5. Legyen az $f(x)$ valós függvény additív, azaz

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

továbbá f felülről korlátos valamely $[a, b]$ intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy f lineáris (azaz $f(x) = cx$ valamely c konstanssal).

6. Legyen $1 \le n$ egész. Ha az n-edfokú f polinom főegyütthatója 1, akkor

$$2^{-n+1} \le \max_{-1<x<1} |f(x)|$$

Egyenlőség csak az $f(x) = 2^{-n+1}T_n(x)$ polinomra állhat, ahol T_n a Csebisev-polinom, $T_n(\cos\vartheta) = \cos(n\vartheta)$.