BME MATEMATIKA VERSENY
2005.04.28.

1. Mutassuk meg, hogy az $a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}$ sorozat konvergens és adjunk minél jobb felső becslést a határértékre.

2. Jelölje S egy háromszög súlyvonalai hosszának összegét, K pedig a kerületét. Adjunk minden háromszögre érvényes pontos alsó és felső becslést az S/K hányadosra.

3. $$\int_0^\pi e^{\cos x} \cos(\sin x) \mathrm{d}x = ?$$

4. Az a_n valós számsorozatra $a_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 \ \forall n$. Mit mondhatunk a $\sum a_n$ sor konvergenciájáról?

5. Adott három nemnegatív egész szám. Ketten játszanak; a soron következő játékos kiválasztja a három szám egyikét és azt legalább 1-gyel tetszés szerint csökkenti (egy nemnegatív egész értékig). Ezután az ellenfél tesz ugyanígy stb. Az nyer, akinél kijön a (0,0,0) számhármas. Milyen kiinduló számhármasoknál van a kezdő játékosnak nyerő stratégiája és hogyan kell nyerni? (Nézzük meg a vesztő számhármasok felírását a kettes számrendszerben.)

6. Legyen $G = (A, B)$ páros gráf, $|A| \leq |B|$. Tegyük fel, hogy bármely $X \subset A$ halmaz összes B-beli szomszédainak $N(X)$ halmazára $|X| < |N(X)|$. Akkor létezik olyan A-t lefedő párosítás G-ben, ami egy előre adott élet tartalmaz.

7. Keressük meg a 3^n hatványok balról második jegyének eloszlását. Melyik jegy a leggyakoribb?

8. Legyenek A, B önadjungált $m \times m$-es mátrixok, csupa 1 és 0 sajátértékekkel. Bizonyítsuk be, hogy az $(AB)^n$ mátrixsorozat konvergens.

9. Legyen $f(z)$ az egész komplex síkon reguláris függvény. Mutassuk meg, hogy ha f nem konstans, akkor $\mathrm{Re} f(z)$ és $\mathrm{Im} f(z)$ is minden valós értéket felvesz.

10. Vegyünk fel $2n$ darab egymástól független, egyenletes eloszlású pontot az egységkör kerületén, jelöljük ezeket $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$-nel. Húzzuk be az $A_1A_2, A_3A_4, \ldots, A_{2n-1}A_{2n}$ húrokat és jelöljük a keletkezett metszéspontok számát X-szel. Számoljuk ki X várható értékét.