Pólya-Szegő szakkör 2004. tavaszi félév
Néhány feladat megoldása

7.2. A bizonyításhoz felhasználjuk Schur tételét: minden n pozitív egészhez van olyan N, hogy az $1, \ldots, N$ számokat n színnel színezve az $a + b = c$ egyenletnek van egyszínű megoldása.

Válasszuk N-et úgy, hogy teljesüljön rá a Schur-tétel állítása, és legyen $p > N$ prím. Ekkor persze p-re is teljesül az állítás. Legyen g primitív gyök modulo p (tudjuk, hogy ilyen létezik p prímszámra). A p-nél kisebb pozitív egészeket színezzük, a színe legyen $\mathrm{ind}_g\, a$ modulo n. A Schur-tétel szerint vannak olyan u_1, u_2, u_3 1 és n közötti egészek, hogy egyszínűek (a színük i) és $u_1 = u_2 + u_3$. Azaz:

$$u_1 \equiv g^{t_1 n+i} \pmod{p}, \quad u_1 \equiv g^{t_2 n+i} \pmod{p}, \quad u_1 \equiv g^{t_3 n+i} \pmod{p}$$

$$g^{t_1 n+i} \equiv g^{t_2 n+i} + g^{t_3 n+i} \pmod{p}$$

Utóbbit g^i-vel egyszerűsíthetjük; $x = g^{t_1}$, $y = g^{t_2}$, $z = g^{t_3}$ választással teljesül a feladat állítása.

8.6. Feltehetjük, hogy $x \leq y \leq z$, ezzel érdemi megoldást nem veszítünk. A cél, hogy a kx szorzatra adjunk alsó és felső korlátot is. Tegyük fel, hogy valamely k-ra $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ megoldható és tekintsük ennek egy "legkisebb" megoldását. Ha x, y, z megoldás, akkor x, y, z_1 is megoldás, ahol $z_1 = kxy - z$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz \iff x^2 + y^2 + (kxy - z)^2 = kxy(kxy - z)$$

Ezek szerint ha x, y, z legkisebb megoldás, akkor $z \leq \frac{kxy}{2}$, különben $z_1 < z$, és x, y, z_1 egy kisebb megoldás lenne. Tehát:

$$x \leq y \leq z \leq \frac{kxy}{2}$$

Innen $y \leq \frac{kxy}{2}$, ahonnan $kx \geq 2$.

Továbbá $y \leq z \leq \frac{kxy}{2}$ miatt

$$\frac{kxy}{2} - y \geq \frac{kxy}{2} - z \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + (\frac{kxy}{2} - y)^2 \geq x^2 + y^2 + (\frac{kxy}{2} - z)^2 = (\frac{kxy}{2})^2$$

$$x^2 + 2y^2 \geq kxy^2, \quad x \leq y \Longrightarrow 3y^2 \geq kxy^2$$

Végül is azt kapjuk, hogy $3 \geq kx$, azaz kx értéke 2 vagy 3 lehet.

$$kx = 2 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2yz, \quad x^2 + (y-z)^2 = 0$$

Utóbbiból $x = 0$, ami ellentmondás, azaz csak a $kx = 3$ lehetőség marad. Ekkor $k = 1$ vagy 3, ezekre van is megoldás:

$$k = 1 \qquad x = y = z = 3$$

$$k = 3 \qquad x = y = z = 1$$