IMC 2004 1. nap 6. feladat megoldása

Minden $z \notin \{0,1\}$-re legyen $f(z) = \sum (\log z)^{-4}$, ahol az összegzés a logaritmus összes ágán fut végig.

Ha $z = e^{x+iy}$, ahol $0 \le y < 2\pi$, akkor

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[x + i(y + 2k\pi)]^4}.$$

Az összeg pontonként abszolút konvergens, hiszen $\sum k^{-4}$ típusú minden egyes z-re. Belátjuk, hogy differenciálható (és így folytonos) is. Rögzítsünk valamely logaritmust $\log_0$-nak úgy, hogy az reguláris legyen z valamely környezetében; $f(z)$ ekkor írható így is:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\log_0 z + 2k\pi i)^4}.$$

Ha $z \notin \{0,1\}$, akkor az összeg tagonként differenciálható:

$$\left(\frac{1}{(\log_0 z + 2k\pi i)^4}\right)' = \frac{1}{(\log_0 z + 2k\pi i)^5 z}$$

Ha belátjuk, hogy ha tagonként deriválunk és ezután összegzünk, és az így kapott sor lokálisan egyenletesen konvergens, akkor ebből már adódik az, hogy $f(z)$ reguláris. Az így kapott sor szintén pontonként abszolút konvergens, ugyanis $\sum k^{-5}$ típusú. Ahhoz, hogy lokálisan egyenletesen konvergens, vegyük az alábbi különbséget:

$$\frac{1}{(\log_0 z_0 + 2k\pi i)^5 z_0} - \frac{1}{(\log_0 z + 2k\pi i)^5 z}$$

Elég belátni, hogy ez $z \to z_0$ esetén tart a 0-hoz ($z_0 \notin \{0,1\}$).

$$\left|\frac{1}{(\log_0 z_0 + 2k\pi i)^5 z_0} - \frac{1}{(\log_0 z + 2k\pi i)^5 z}\right| \le$$

$$= \left|\frac{1}{(\log_0 z_0 + 2k\pi i)^5 z_0} - \frac{1}{(\log_0 z_0 + 2k\pi i)^5 z}\right| +$$

$$\left|\frac{1}{(\log_0 z_0 + 2k\pi i)^5 z} - \frac{1}{(\log_0 z + 2k\pi i)^5 z}\right| = D_1 + D_2$$

D_1-et és D_2-t külön becsüljük.

$$D_1 = \left|\frac{z_0 - z}{(\log_0 z_0 + 2k\pi i)^5 z_0 z}\right|,$$

és ez nekünk elég, hiszen a számláló k-tól független, és 0-hoz tart, amint $z \to z_0$, míg a nevezőnek pozitív alsó korlátja van, tehát az ilyen típusú kifejezéseket összegezve is olyan sort kapunk, mely tart a 0-hoz, amint $z \to z_0$. Még ugyanezt be kell látni D_2-re is.

$$D_2 = \left|\frac{(\log_0 z_0 + 2k\pi i)^5 - (\log_0 z + 2k\pi i)^5}{(\log_0 z_0 + 2k\pi i)^5 (\log_0 z + 2k\pi i)^5 z}\right|$$

A számlálót vizsgáljuk. $a^5 - b^5$ típusú kifejezésből $a - b$, jelen esetben $(\log_0 z_0 - \log_0 z)$ kiemelhető; mi marad? A maradék a kiemelés után k negyedfokú polinomja lesz (a z-t és z_0-t tartalmazó tagok korlátosak), míg a nevező k tizedfokú polinomja, így egy k^{-6} típusú kifejezést kaptunk. Ez összegezhető, és mivel még van egy $(\log_0 z_0 - \log_0 z)$ szorzónk, így D_2 is tart a 0-hoz, amint $z \to z_0$.

Ezzel tehát megvan, hogy $f(z)$ reguláris, ha $z \notin \{0,1\}$.

A következő állításunk az, hogy $\lim_{z\to 0} f(z) = 0$, azaz f a 0-ban folytonossá tehető (és ekkor reguláris is). Az is kijön egyúttal, hogy $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Egészen pontosan azt bizonyítjuk, hogy ha $z = e^{x+iy}$ és $|x| \to \infty$ (azaz $z \to 0$ vagy $z \to \infty$), akkor $f(z) \to 0$.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[x + i(y + 2k\pi)]^4} =$$

$$\sum_{|k|<|x|} \frac{1}{[x + i(y + 2k\pi)]^4} + \sum_{|k|\geq|x|} \frac{1}{[x + i(y + 2k\pi)]^4} = S_1 + S_2$$

Külön becsüljük S_1-et és S_2-t, szem előtt tartva, hogy S_1-ben $|x| > |k|$, míg S_2-ben $|k| \geq |x|$.

$$|S_1| \leq \sum_{|k|<|x|} \frac{1}{|x|^4},$$

hiszen ha elhagyjuk a nevező képzetes részét, akkor a nevező abszolútértéke csökken, a törté nő. Tovább

$$|S_1| \leq \sum_{|k|<|x|} \frac{1}{|x|^4} < \frac{2|x|}{|x|^4} = \frac{2}{|x|^3},$$

ugyanis az összegzésben $\frac{1}{|x|^4}$ konstans, és a tagok száma legfeljebb $2|x|$. Az utolsó kifejezésről már világos, hogy 0-hoz tart, ha $|x| \to \infty$.

S_2 pedig $\sum k^{-4}$ típusú, így abszolút konvergens sor, és ha az összegzést egyre nagyobb indextől kezdve hajtjuk végre ($|k| \geq |x|$ és $|x| \to \infty$), akkor a sorösszeg tart a 0-hoz.

Most megvizsgáljuk f-et az 1 környékén. Itt a definiáló sorösszegben egyetlen tag van, ami gondot okoz: amikor $\log 1 = 0$, a többi tag összege ugyanúgy abszolút konvergens, mint a $z \neq 1$ pontokban. 1 környékén $\log z$ reguláris, és 1 középponttal Taylor-sorba fejthető:

$$\log z = (z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \dots$$

$z \to 1$ esetén az első tag a domináns, így $\log z \approx z - 1$, amiből már látható, hogy $\frac{(z-1)^4}{(\log z)^4}$ az 1-ben is létezik; pl. L'Hospital szabállyal:

$$\lim_{z\to 1} \frac{z-1}{\log z} = \lim_{z\to 1} \frac{(z-1)'}{(\log z)'} = \frac{1}{\frac{1}{z}} = 1$$

f-nek tehát negyedrendű pólusa van 1-ben, és a komplex síkon mindenhol máshol reguláris (beleértve a végtelent is). Eszerint $f(z)(z-1)^4$ mindenhol reguláris, és $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ miatt $f(z)(z-1)^4 < cz^4$ elég nagy abszolútértékű z-re, így Liouville tétele szerint $f(z)(z-1)^4$ legfeljebb negyedfokú polinom.

Legyen tehát $Q(z) = (z-1)^4$, és már csak $P(z)$-t kell megadni. $P(z)$ negyedfokú nem lehet, mert ekkor $\frac{P(z)}{Q(z)}$ a végtelenben a főegyütthatók hányadosához tartana, ami nem nulla; így $P(z)$ legfeljebb harmadfokú. $f(0) = 0$-ból P-nek gyöke a 0; továbbá az 1 körüli korábbi vizsgálódásaink alapján $P(1) = 1$, mert az f-et megadó sorösszeg tagjait a $(z-1)^4$-nel való beszorzás egy tag kivételével kiejti, az az egy tag pedig 1 lesz. $P(z) = z(az^2 + bz + c)$, ahol $a + b + c = 1$.

Még két egyenletre van szükségünk a, b, c meghatározásához; egy lehetőség pl. az $f(z) + f(-z) = 16f(z^2)$ egyenlőség felhasználása, ahonnan $b = 4a$ és $a = c$. Az egyenlőség azon múlik, hogy $\log(z^2) = 2\log z$ és $\log(z^2) = 2\log(-z)$ helyettesíthető a log megfelelő ágaiban. A P együtthatóira kapott egyenletekből végül $P(z) = z(\frac{1}{6}z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{6})$.