# 3. Bináris lineáris kódok

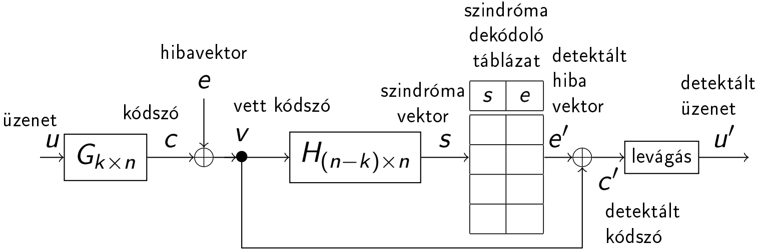
Kódolástechnika

# A kódolási séma

Lineáris kódoknál $c = uG$, majd a $v$ vett kódszóból az

$$s^T = Hv^T$$

szindrómát számítjuk ki, az alapján detektáljuk a hibát.




Végül, ha a kód szisztematikus (a kódszó eleje az üzenet), akkor elég egy levágás.

# Lineáris kódok fejlesztése

Tekintsük a következő $G$ generátormátrixot és $H$ paritás ellenőrző mátrixot:

$$G_{2\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad H_{3\times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

($GH^T = 0$ fennáll.)

$G$ és $H$ együtt definiál egy szisztematikus $C(5,2)$ kódot.

# Kódvektorok

Mik ennek a kódnak a kódvektorai?

# Kódvektorok

Mik ennek a kódnak a kódvektorai?

Megoldás.

$$c^{(0)} = u^{(0)}G = (00) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (00000)$$

$$c^{(1)} = u^{(1)}G = (01) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (01111)$$

$$c^{(2)} = u^{(2)}G = (10) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (10110)$$

$$c^{(3)} = u^{(3)}G = (11) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (11001)$$

# A (001) szindróma hibacsoportja

Adjuk meg a (001) szindróma hibacsoportját.

# A (001) szindróma hibacsoportja

Adjuk meg a (001) szindróma hibacsoportját. Egy $s$ szindróma vektor hibacsoportja

$$E_s = \{e : He^T = s^T\}.$$

For $s^{(1)} = (001)$:

$$s^{(1)} = (001) \quad \rightarrow \quad E_1 = E_{001} = \left\{ e : He^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$e = (00001) \quad \rightarrow \quad He^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s^{(1)} = (001) \quad \rightarrow \quad E_1 = E_{001} = \{(00001), (01110), (10111), (11000)\}$$

# A hibacsoport tulajdonság ellenőrzése

$$s^{(1)} = (001) \quad \to \quad E_1 = E_{001} = \{(00001), (01110), (10111), (11000)\}$$

$$e = (00001) \quad \to \quad He^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e = (01110) \quad \to \quad He^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# A csoportvezető kiválasztása

Feltéve, hogy $P_b = 0.01$,

$$E_1 = E_{001} = \{ \begin{array}{cccc} (00001), & (01110), & (10111), & (11000) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w = 1 & w = 3 & w = 4 & w = 2 \\ & & & \\ 9.6 \cdot 10^{-3} & 9.8 \cdot 10^{-7} & 9.9 \cdot 10^{-9} & 9.7 \cdot 10^{-5} \end{array} \}$$

A csoportvezető $e = (00001)$, mivel ennek a legnagyobb a valószínűsége (ezzel ekvivalensen ennek a legkisebb a súlya).

# Szindróma dekódoló táblázat

Minden egyes szindróma vektorhoz azonosítjuk a csoportvezetőt (a legvalószínűbb hibavektort), és ezeket a párokat eltároljuk a szindróma dekódoló táblázatban, más néven lookup table-ben (LUT):

| szindróma vektor | csoportvezető |
|---|---|
| (000) | (00000) |
| (001) | (00001) |
| (010) | (00010) |
| (011) | (00011) |
| (100) | (00100) |
| (101) | (00101) |
| (110) | (10000) |
| (111) | (01000) |

# A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

Az előbbi táblázat a következő módon kapható meg:

1. Listázzuk a $0, \ldots, 2^n - 1$ számokat.
2. Átírjuk őket bináris alakra, ezzel megkapjuk a lehetséges $e \in \{0,1\}^n$ hibavektorok listáját.
3. Kiszámítjuk a $He^T = s^T, \ \forall e \in \{0,1\}^n$ szorzatokat.
4. A szorzatokat az $s$ értékük szerint csoportokba rendezzük.
5. Minden egyes csoportban megkeressük a minimális súlyú $e$ vektort, ez lesz a csoportvezető.
6. Az összetartozó $s, e$ párokat összegyűjtjük az LUT-ben.

## A szindróma táblázat konstrukciója

1. és 2. lépés: listázzuk a lehetséges hibavektorokat.

| | | |
|---|---|---|
| $0 \to e = (00000)$ | $11 \to e = (01011)$ | $22 \to e = (10110)$ |
| $1 \to e = (00001)$ | $12 \to e = (01100)$ | $23 \to e = (10111)$ |
| $2 \to e = (00010)$ | $13 \to e = (01101)$ | $24 \to e = (11000)$ |
| $3 \to e = (00011)$ | $14 \to e = (01110)$ | $25 \to e = (11001)$ |
| $4 \to e = (00100)$ | $15 \to e = (01111)$ | $26 \to e = (11010)$ |
| $5 \to e = (00101)$ | $16 \to e = (10000)$ | $27 \to e = (11011)$ |
| $6 \to e = (00110)$ | $17 \to e = (10001)$ | $28 \to e = (11100)$ |
| $7 \to e = (00111)$ | $18 \to e = (10010)$ | $29 \to e = (11101)$ |
| $8 \to e = (01000)$ | $19 \to e = (10011)$ | $30 \to e = (11110)$ |
| $9 \to e = (01001)$ | $20 \to e = (10100)$ | $31 \to e = (11111)$ |
| $10 \to e = (01010)$ | $21 \to e = (10101)$ | |

# A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes $e$ vektort beszorzunk a $H$ paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes $e$ vektort beszorzunk a $H$ paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

# A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes $e$ vektort beszorzunk a $H$ paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

# A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes $e$ vektort beszorzunk a $H$ paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes $e$ vektort beszorzunk a $H$ paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{bmatrix}11100\\11010\\01001\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

# A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

3. lépés. Minden egyes $e$ vektort beszorzunk a $H$ paritás ellenőrző mátrixszal:

$$\begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

4. és 5. lépés: a szorzatokat csoportosítjuk az értékük szerint, és kiválasztjuk a csoportvezetőket.

$$E_{(000)} = \{(00000), (01111), (10110), (11001)\} \to e_{(000)} = (00000)$$
$$E_{(001)} = \{(00001), (01110), (10111), (11000)\} \to e_{(001)} = (00001)$$
$$E_{(010)} = \{(00010), (01101), (10100), (11011)\} \to e_{(010)} = (00010)$$
$$E_{(011)} = \{(00011), (01100), (10101), (11010)\} \to e_{(011)} = (00011)$$
$$E_{(100)} = \{(00100), (01011), (10010), (11101)\} \to e_{(100)} = (00100)$$
$$E_{(101)} = \{(00101), (01010), (10011), (11100)\} \to e_{(101)} = (00101)$$
$$E_{(110)} = \{(00110), (01001), (10000), (11111)\} \to e_{(110)} = (10000)$$
$$E_{(111)} = \{(00111), (01000), (10001), (11110)\} \to e_{(111)} = (01000)$$

# A szindróma dekódoló táblázat konstrukciója

6. lépés. Összeállítjuk a szindróma dekódoló táblázatot.

| szindróma vektor | csoportvezető |
|---|---|
| (000) | (00000) |
| (001) | (00001) |
| (010) | (00010) |
| (011) | (00011) |
| (100) | (00100) |
| (101) | (00101) |
| (110) | (10000) |
| (111) | (01000) |

# Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Bármely $c$ kódszóra és $e$ hibavektorra $e$ és $e + c$ ugyanabba a hibacsoportba tartoznak, mivel $Hc^T = 0$. Ennek felhasználásával mutatunk egy másik módszert a hibacsoportok kiszámítására. Először listázzuk a kódszavakat:

$$c^{(0)} = (00000),\ c^{(1)} = (01111),\ c^{(2)} = (10110),\ c^{(3)} = (11001).$$

Ezután

1. Választunk egy $e$ hibavektort.
2. Kiszámítjuk a megfelelő $s$ szindróma vektort: $He^T = s^T$.
3. $E_s = \left\{ e, e + c^{(1)}, \ldots, e + c^{(2^k - 1)} \right\}$.
4. Választunk egy olyan $e$ hibavektort, ami még nem szerepel egyik csoportban sem, és megismételjük a 2. lépéstől.

# Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa.

1. Kiválasztjuk $e = (00000)$-t.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(000)} = &\{(00000), (00000) + (01111), \\ &(00000) + (10110), (00000) + (11001)\} = \\ &\{(00000), (01111), (10110), (11001)\}. \end{aligned}$$

# Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (00001)$-et.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(001)} = &\{(00001), (00001) + (01111), \\ &(00001) + (10110), (00001) + (11001)\} = \\ &\{\color{red}{(00001)}, (01110), (10111), (11000)\}. \end{aligned}$$

# Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (00010)$-t.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(010)} = &\{(00010), (00010) + (01111), \\ &(00010) + (10110), (00010) + (11001)\} = \\ &\{(00010), (01101), (10100), (11011)\}. \end{aligned}$$

# Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (00100)$-t.
2. $He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$
3. $$\begin{aligned} E_{(100)} = & \{(00100), (00100) + (01111), \\ & (00100) + (10110), (00100) + (11001)\} = \\ & \{\textcolor{red}{(00100)}, (01011), (10010), (11101)\}. \end{aligned}$$

# Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (01000)$-t.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(111)} = &\{(01000), (01000) + (01111), \\ &(01000) + (10110), (01000) + (11001)\} = \\ &\{{\color{red}(01000)}, (00111), (11110), (10001)\}. \end{aligned}$$

# Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (10000)$-t.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(110)} = & \{(10000), (10000) + (01111), \\ & (10000) + (10110), (10000) + (11001)\} = \\ & \{(10000), (11111), (00110), (01001)\}. \end{aligned}$$

# Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (00101)$-et.
2. $He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
3. 

$$\begin{aligned} E_{(101)} =& \{(00101), (00101) + (01111), \\ & (00101) + (10110), (00101) + (11001)\} = \\ & \{{\color{red}(00101)}, (01010), (10011), (11100)\}. \end{aligned}$$

# Egy másik módszer a hibacsoportok kiszámítására

Példa (folytatás).

1. Kiválasztjuk $e = (00011)$-et.
2. $$He^T = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 01001 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
3. $$\begin{aligned} E_{(011)} = &\{(00011), (00011) + (01111), \\ &(00011) + (10110), (00011) + (11001)\} = \\ &\{(00011), (01100), (10101), (11010)\}. \end{aligned}$$

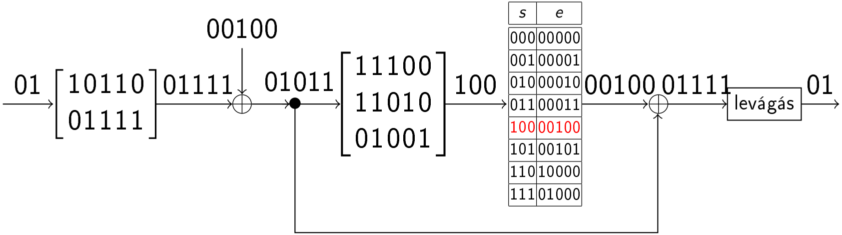
# A kódolási séma

Hajtsuk végre az előbbi kódolási sémát a (01) üzenetvektorra és (00100) hibavektorra.

# A kódolási séma

Hajtsuk végre az előbbi kódolási sémát a (01) üzenetvektorra és (00100) hibavektorra.

Megoldás.



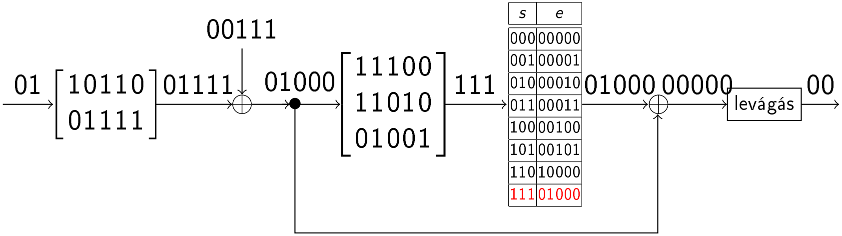
# A kódolási séma

Hajtsuk végre az előbbi kódolási sémát a (01) üzenetvektorra és (00111) hibavektorra.

# A kódolási séma

Hajtsuk végre az előbbi kódolási sémát a (01) üzenetvektorra és (00111) hibavektorra.

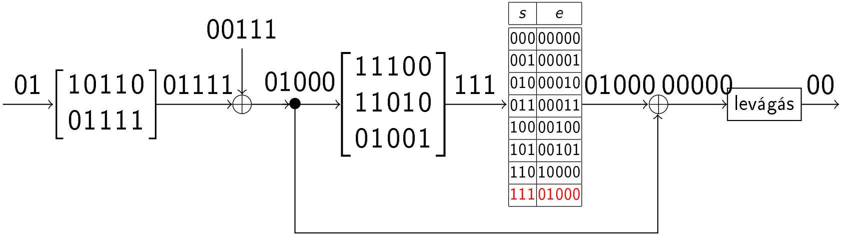
Megoldás.



# A kódolási séma

Hajtsuk végre az előbbi kódolási sémát a (01) üzenetvektorra és (00111) hibavektorra.

Megoldás.




A (00111) hibavektor valószínűsége elég kicsi ahhoz, hogy a hibás dekódolás ne jelentsen problémát (kommunikációs QoS).

# A standard táblázat

| szindróma vektor | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| (000) | (00000) | (10110) | (11001) | (01111) |
| (001) | (00001) | (11000) | (01110) | (10111) |
| (010) | (00010) | (10100) | (01101) | (11011) |
| (011) | (00011) | (01100) | (10101) | (11010) |
| (100) | (00100) | (10010) | (01011) | (11101) |
| (101) | (00101) | (01010) | (10011) | (11100) |
| (110) | (10000) | (01001) | (00110) | (11111) |
| (111) | (01000) | (10001) | (00111) | (11110) |

# Kommunikációs QoS tervezés

A következő hibavektorokat képes a kód javítani:

$$\begin{array}{cccc} (00000) & (00001) & (00010) & (00011) \\ (00100) & (00101) & (10000) & (01000) \end{array}$$

Ezek közt szerepel az összes 0 és 1 súlyú hibavektor, valamint kettő 2 súlyú hibavektor. Egyéb hibavektor esetén hibás dekódolást kapunk, így a blokk hiba valószínűség

$$P_e = \left(\binom{5}{2} - 2\right) P_b^2 (1-P_b)^3 + \binom{5}{3} P_b^3 (1-P_b)^2 + 5P_b^4(1-P_b) + P_b^5;$$

például $P_b = 0.1$-re,

$$P_e \approx 0.0669.$$

# QoS javítás

Mit nyerünk a hibajavító kód használatával?

# QoS javítás

Mit nyerünk a hibajavító kód használatával?

Nézzük meg, mi történik, ha az üzeneteket kódolás nélkül küldjük át ugyanazon a csatornán. Egy 2 bit hosszú blokk esetén a hibás dekódolás valószínűsége

$$1 - (1 - P_b)^2 = 0.19,$$

míg a kód használata esetén 0.0669. (Cserébe viszont a kód ráta 2/5, azaz a kód használata a csatorna kapacitását 2/5 részére csökkenti.)

# QoS javítás

Egy másik összehasonlítási lehetőség, hogy egy olyan csatornával hasonlítjuk össze, ahol 5 hosszú üzeneteket küldünk a csatornán hibajavító kód nélkül, és azt vizsgáljuk meg, hogy ezen a másik csatornán milyen $P_b'$ bit hiba valószínűség esetén lesz a blokk hiba valószínűség pont annyi, mint az eredeti csatornán hibajavító kóddal.

# QoS javítás

Egy másik összehasonlítási lehetőség, hogy egy olyan csatornával hasonlítjuk össze, ahol 5 hosszú üzeneteket küldünk a csatornán hibajavító kód nélkül, és azt vizsgáljuk meg, hogy ezen a másik csatornán milyen $P'_b$ bit hiba valószínűség esetén lesz a blokk hiba valószínűség pont annyi, mint az eredeti csatornán hibajavító kóddal.

Ehhez teljesülnie kell, hogy

$$1 - (1 - P'_b)^k = P_e = 0.0669 \quad \rightarrow \quad P'_b \approx 0.0137.$$

Vagyis a hibajavítás révén ugyanazt a blokk hiba valószínűséget el tudjuk érni egy zajosabb csatornán is ($P_b = 0.1 > 0.0137 = P'_b$).

# Feladat

Egy bináris szisztematikus kódot a kódszavaival adunk meg:

$$c^{(0)} = (000000), \quad c^{(1)} = (010101),$$
$$c^{(2)} = (101010), \quad c^{(3)} = (111111).$$

(a) Mi ennek a kódnak a típusa?
(b) Adjuk meg a kód hibadetektálási és hibajavítási képességeit.
(c) Számítsuk ki a generátormátrixot és a paritásellenőrző mátrixot.
(d) Adjuk meg a hibacsoportokat.
(e) Konstruáljuk meg a szindróma dekódolási táblázatot.

# Feladat

$$c^{(0)} = (000000), c^{(1)} = (010101), c^{(2)} = (101010), c^{(3)} = (111111)$$

(a) A kód típusa C(6,2), mivel a kódszavak $n = 6$ hosszúak és $4 = 2^k$ darab kódszó van, tehát $k = 2$.

# Feladat

$$c^{(0)} = (000000), c^{(1)} = (010101), c^{(2)} = (101010), c^{(3)} = (111111)$$

(a) A kód típusa C(6,2), mivel a kódszavak $n = 6$ hosszúak és $4 = 2^k$ darab kódszó van, tehát $k = 2$.

(b) Bináris lineáris kódra

$$d_{\min} = \min_{c:c \neq (00...0)} w(c) = 3,$$

tehát a kód hiba detektálási képessége

$$d_{\min} - 1 = 2,$$

és a kód hibajavítási képessége

$$\left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor = 1.$$

# Feladat

$$c^{(0)} = (000000), c^{(1)} = (010101), c^{(2)} = (101010), c^{(3)} = (111111)$$

(c) A $G$ generátormátrix első sora $c^{(2)}$, a 2. sora pedig $c^{(1)}$:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A kód szisztematikus, mivel $G$ baloldali $2 \times 2$-es blokkja az identitás mátrix.

$$G = \left[\begin{array}{|cc|cccc} \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right].$$

# Feladat

$$c^{(0)} = (000000), c^{(1)} = (010101), c^{(2)} = (101010), c^{(3)} = (111111)$$

(c)

$$G = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \underbrace{\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}}}_{B}\right]$$

Szisztematikus kódokra a $H$ paritásellenőrző mátrix megkapható úgy, mint

$$H = (B^T, I_{n-k}) = \left[\underbrace{\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}}}_{B^T} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

# Feladat

(d)

$$E_{(0000)} = \{(000000),(010101),(101010),(111111)\},$$
$$E_{(0001)} = \{(000001),(010100),(101011),(111110)\},$$
$$E_{(0010)} = \{(000010),(010111),(101000),(111101)\},$$
$$E_{(0100)} = \{(000100),(010001),(101110),(111011)\},$$
$$E_{(1000)} = \{(001000),(011101),(100010),(110111)\},$$
$$E_{(0101)} = \{(010000),(000101),(111010),(101111)\},$$
$$E_{(1010)} = \{(100000),(110101),(001010),(011111)\},$$
$$E_{(0011)} = \{(000011),(010110),(101001),(111100)\},$$

# Feladat

(d)

$$
\begin{aligned}
E_{(1001)} &= \{(001001),(011100),(100011),(110110)\},\\
E_{(1011)} &= \{(100001),(110100),(001011),(011110)\},\\
E_{(0110)} &= \{(000110),(010011),(101100),(111001)\},\\
E_{(0111)} &= \{(010010),(000111),(111000),(101101)\},\\
E_{(1111)} &= \{(110000),(100101),(011010),(001111)\},\\
E_{(1100)} &= \{(001100),(011001),(100110),(110011)\},\\
E_{(1110)} &= \{(100100),(110001),(001110),(011011)\},\\
E_{(1101)} &= \{(011000),(001101),(110010),(100111)\}.
\end{aligned}
$$

# Feladat

(e)

| Szindróma vektor | csoportvezető hiba vektor |
|---|---|
| 0001 | 000001 |
| 0010 | 000010 |
| 0100 | 000100 |
| 1000 | 001000 |
| 0101 | 010000 |
| 1010 | 100000 |
| 0011 | 000011 |
| 1001 | 001001 |
| 1011 | 100001 |
| 0110 | 000110 |
| 0111 | 010010 |
| 1111 | 110000 |
| 1100 | 001100 |
| 1110 | 100100 |
| 1101 | 011000 |