3. Hamming-kódok

Kódolástechnika

A cél

Tervezzünk olyan kódot, amely képes egyetlen hibát kijavítani.

Motiváció: Ha a csatorna jó minőségű (pl. vezetékes összeköttetés), akkor a többszörös hibák generálásának valószínűsége kicsi. Ezért elegendő minden egyszeres hibát javítani, mert ezek fordulnak elő nagy valószínűséggel.

Hamming-kódok

A Hamming-kódok egyetlen hiba javítására képesek.

A Hamming-kódok perfekt kódok:

$$n = 2^{n-k} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{1} \binom{n}{i} = 2^{n-k}$$

A $C(n,k)$ Hamming-kódok konstrukciója:

- a H paritás ellenőrző mátrix oszlopait úgy választjuk meg, hogy mind különböző legyen és a csupa nulla oszlop ne szerepeljen köztük;
- meghatározzuk a generátormátrixot;
- megtervezzük az "illesztő kapukat" a szindróma dekódoláshoz;
- implementáljuk az egész sémát.

A $C(7,4)$ Hamming-kód

$n = 7, k = 4$, tehát $n + 1 = 8 = 2^{7-4}$ teljesül.

A $C(7,4)$ Hamming-kód

$n = 7, k = 4$, tehát $n + 1 = 8 = 2^{7-4}$ teljesül.

A paritás ellenőrző mátrix konstrukciója:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A $C(7,4)$ Hamming-kód

$n = 7, k = 4$, tehát $n + 1 = 8 = 2^{7-4}$ teljesül.

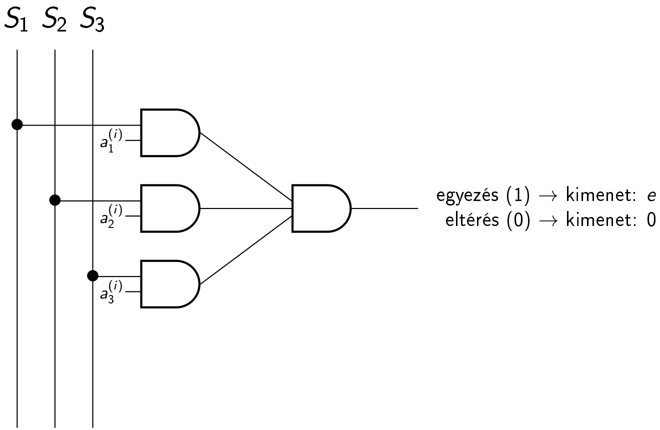
A paritás ellenőrző mátrix konstrukciója:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A generátormátrix:

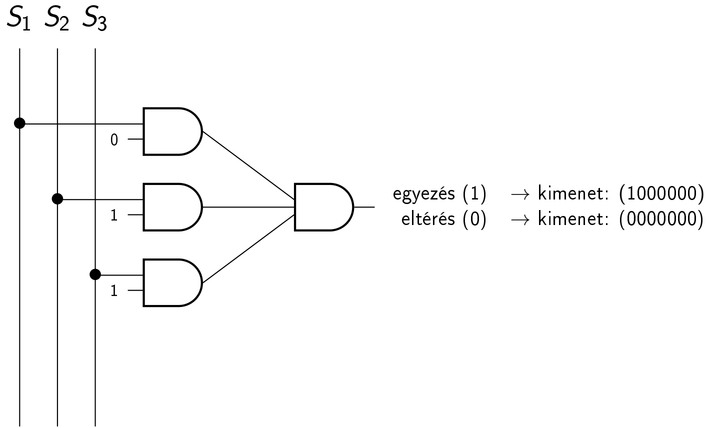
$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az “illesztő kapuk” konstrukciója



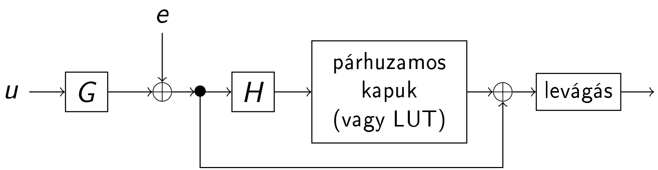
Az “illesztő kapuk” konstrukciója

Pl. $a^{(1)} = (011)$:



Hasonlóan $a^{(2)} = (101), \ldots, a^{(7)} = (001)$-re.

A rendszer implementációja



1. feladat

Egy bináris csatorna bit hiba valószínűsége $P_b = 0.001$.

(a) Átküldünk egy 57 bit hosszú üzenetet a csatornán kódolás nélkül. Mennyi a blokk hiba valószínűsége (vagyis annak az esélye, hogy az üzenet hibásan érkezik meg)?

(b) Átküldünk egy 57 bit hosszú üzenetet a csatornán C(63,57) Hamming-kóddal kódolva. Mennyi a blokk hiba valószínűsége (vagyis annak az esélye, hogy hibás az üzenet dekódolása)?

1. feladat

Egy bináris csatorna bit hiba valószínűsége $P_b = 0.001$.

(a) Átküldünk egy 57 bit hosszú üzenetet a csatornán kódolás nélkül. Mennyi a blokk hiba valószínűsége (vagyis annak az esélye, hogy az üzenet hibásan érkezik meg)?

(b) Átküldünk egy 57 bit hosszú üzenetet a csatornán C(63,57) Hamming-kóddal kódolva. Mennyi a blokk hiba valószínűsége (vagyis annak az esélye, hogy hibás az üzenet dekódolása)?

Megoldás.

(a) Annak a valószínűsége, hogy minden bit helyesen érkezik meg,

$$(1 - P_b)^{57} \approx 0.9446,$$

a blokk hiba valószínűsége pedig

$$1 - (1 - P_b)^{57} \approx 0.0554.$$

1. feladat

(a) Hamming kód használata esetén a dekódolás helyes lesz, ha 0 vagy 1 hiba van a vett kódszóban. A helyes dekódolás valószínűsége

$$(1-P_b)^{63}+63(1-P_b)^{62}P_b = 0.99^{63}+62\cdot 0.999^{62}\cdot 0.001 \approx 0.99812,$$

a blokk hiba valószínűsége pedig

$$1-(1-P_b)^{63}-63(1-P_b)^{62}P_b \approx 0.00188.$$

1. feladat

(a) Hamming kód használata esetén a dekódolás helyes lesz, ha 0 vagy 1 hiba van a vett kódszóban. A helyes dekódolás valószínűsége

$$(1-P_b)^{63}+63(1-P_b)^{62}P_b = 0.99^{63}+62\cdot 0.999^{62}\cdot 0.001 \approx 0.99812,$$

a blokk hiba valószínűsége pedig

$$1-(1-P_b)^{63}-63(1-P_b)^{62}P_b \approx 0.00188.$$

Vagyis a C(63,57) Hamming kód használatával csökkentettük a blokk hiba valószínűségét 0.0554-ről 0.00188-re, ennek ára pedig az, hogy a kód ráta 57/63, vagyis az effektív csatorna kapacitás az eredeti kapacitás 57/63 részére csökkent.

2. feladat

(a) Egy bináris csatorna bit hiba velószínűsége $P_b = 0.01$. Átküldünk egy 4 bit hosszú üzenetet a csatornán C(7,4) Hamming kóddal kódolva. Mennyi a blokk hiba valószínűsége?

(a) Egy másik csatorna bit hiba valószínűsége P'_b. Átküldünk egy 4 bit hosszú üzenetet a csatornán kódolás nélkül. Számítsuk ki P'_b értékét úgy, hogy a blokk hiba valószínűsége ugyanannyi legyen, mint az (a) részben.

2. feladat

(a) Egy bináris csatorna bit hiba velószínűsége $P_b = 0.01$. Átküldünk egy 4 bit hosszú üzenetet a csatornán C(7,4) Hamming kóddal kódolva. Mennyi a blokk hiba valószínűsége?

(a) Egy másik csatorna bit hiba valószínűsége P_b'. Átküldünk egy 4 bit hosszú üzenetet a csatornán kódolás nélkül. Számítsuk ki P_b' értékét úgy, hogy a blokk hiba valószínűsége ugyanannyi legyen, mint az (a) részben.

Megoldás.

(a) A blokk hiba valószínűség

$$1 - (1 - P_b)^7 - 7(1 - P_b)^6 P_b \approx 0.00203.$$

2. feladat

(a) Egy bináris csatorna bit hiba velószínűsége $P_b = 0.01$. Átküldünk egy 4 bit hosszú üzenetet a csatornán C(7,4) Hamming kóddal kódolva. Mennyi a blokk hiba valószínűsége?

(a) Egy másik csatorna bit hiba valószínűsége P'_b. Átküldünk egy 4 bit hosszú üzenetet a csatornán kódolás nélkül. Számítsuk ki P'_b értékét úgy, hogy a blokk hiba valószínűsége ugyanannyi legyen, mint az (a) részben.

Megoldás.

(a) A blokk hiba valószínűség

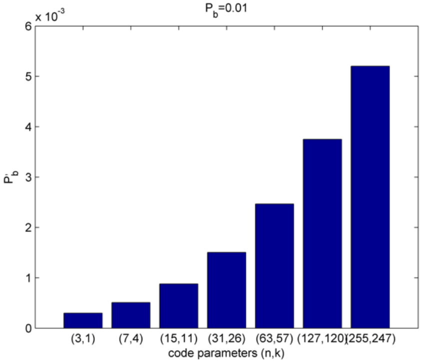
$$1 - (1 - P_b)^7 - 7(1 - P_b)^6 P_b \approx 0.00203.$$

(b) Kódolás nélkül pedig a blokk hiba valószínűség

$$1 - (1 - P'_b)^4 = 0.00203 \quad \rightarrow \quad P'_b \approx 0.000508.$$

Módosított bit hiba valószínűség

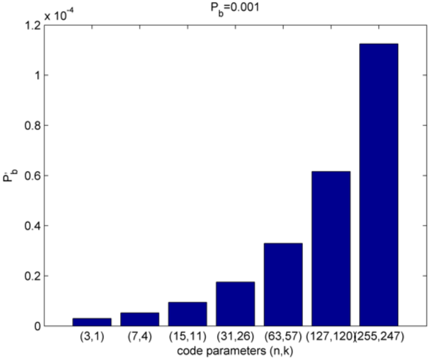
Megadjuk a módosított bit hiba valószínűséget a kód paramétereinek függvényében $P_b = 0.01$ esetén.



Sebesség csökkenés arányok:
$1/3; 4/7; 11/15; 57/63; 120/127; 247/255.$

Módosított bit hiba valószínűség

Megadjuk a módosított bit hiba valószínűséget a kód paramétereinek függvényében $P_b = 0.001$ esetén.



Sebesség csökkenés arányok:
1/3; 4/7; 11/15; 57/63; 120/127; 247/255.

Kód tervezés

Kód tervezés kommunikációs mérnöki szemszögből.

Feladat. Adott egy BSC P_b bit hiba valószínűséggel és egy elérni kívánt QoS γ; tervezzünk kódot, melyre $P_b' < 10^{-\gamma}$.

Kód tervezés

Kód tervezés kommunikációs mérnöki szemszögből.

Feladat. Adott egy BSC P_b bit hiba valószínűséggel és egy elérni kívánt QoS γ; tervezzünk kódot, melyre $P_b' < 10^{-\gamma}$.

Megoldás.

(1) Kiszámítjuk k értékét:

$$1-(1-P_b')^k = 1-(1-P_b)^n - nP_b(1-P_b)^{n-1}.$$

Ha $n-k$ túl nagy, vagy $n > 2^{n-k}-1$, akkor nem létezik olyan megoldás, amely csak egyetlen hibát javít (egy olyan kód, amely egynél több hibát javít, még segíthet).

Kód tervezés

(2) Megkonstruáljuk a paritás ellenőrző mátrixot a következő szabályok alapján:
- minden oszlop különböző;
- egyik oszlop sem csupa 0;
- a kód szisztematikus.

(3) Implementáljuk a kód sémát.

3. Feladat

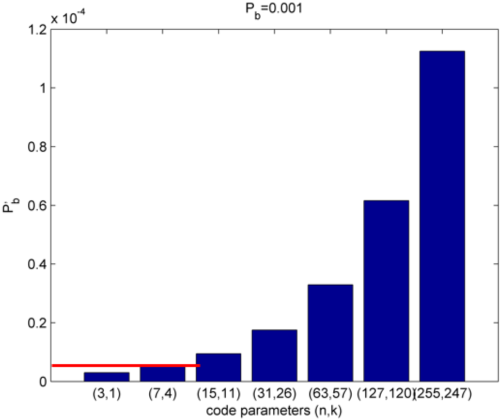
Egy BSC-re $P_b = 0.001$. Tervezzünk egy olyan hibajavító kódot a csatornához, melyre a módosított bit hiba valószínűsége ≤ 0.00001.

3. Feladat

Egy BSC-re $P_b = 0.001$. Tervezzünk egy olyan hibajavító kódot a csatornához, melyre a módosított bit hiba valószínűsége ≤ 0.00001.

Megoldás.

(1) A paraméterek kiválasztása: $n = 7, k = 4$ megfelelő.



4. Feladat

Egy bináris lineáris kód generátormátrixa

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez egy Hamming-kód?

4. Feladat

Egy bináris lineáris kód generátormátrixa

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez egy Hamming-kód?

Megoldás. $n = 5, k = 3$, tehát ez $C(5, 3)$ kód. Viszont

$$n + 1 = 6 \neq 2^{n-k} = 4,$$

tehát ez nem Hamming-kód.

5. Feladat

Egy bináris Hamming-kódra $k = 11$. Mennyi n értéke?

5. Feladat

Egy bináris Hamming-kódra $k = 11$. Mennyi n értéke?

Megoldás. Az

$$n + 1 = 2^{n-k},$$

egyenlet megoldása $n = 15$.

6. Feladat

Egy bináris lineáris kód paritás ellenőrző mátrixa

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez egy Hamming-kód?

6. Feladat

Egy bináris lineáris kód paritás ellenőrző mátrixa

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez egy Hamming-kód?

Megoldás. $n = 7, k = 4$, tehát $n + 1 = 2^{n-k}$ teljesül, viszont az első és a negyedik oszlop megegyezik, tehát ez nem egy Hamming-kód.

7. feladat

Egy szisztematikus bináris lineáris kód paritás ellenőrző mátrixa

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Mik a kód paraméterei?

(b) Ez egy Hamming-kód?

(c) Számítsuk ki a G generátor mátrixot.

(d) Mik a kód hibadetektálási és hibajavítási képességei?

(e) Adjuk meg a (011) hibavektorhoz tartozó szindrómát és hibacsoportot.

7. feladat

Megoldás.

(a) $H = H_{(n-k)\times n}$ egy 2×3-as mátrix, tehát $n - k = 2$ és $n = 3$, azaz ez egy C(3,1) kód.

7. feladat

Megoldás.

(a) $H = H_{(n-k)\times n}$ egy 2×3-as mátrix, tehát $n - k = 2$ és $n = 3$, azaz ez egy C(3,1) kód.

(b) H oszlopai éppen a különböző 2 hosszú bináris vektorok, azaz ez egy Hamming kód.

7. feladat

Megoldás.

(a) $H = H_{(n-k)\times n}$ egy 2×3-as mátrix, tehát $n-k=2$ és $n=3$, azaz ez egy C(3,1) kód.

(b) H oszlopai éppen a különböző 2 hosszú bináris vektorok, azaz ez egy Hamming kód.

(c)

$$H = (B^T, I_{n-k}) = \left[\begin{array}{c|cc} \underbrace{\boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}}_{B^T} & \begin{matrix}1\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\end{array}\right].$$

$$G = (I_k, B) = \left[\begin{array}{cc} 1 & \underbrace{\boxed{1 \quad 1}}_{B}\end{array}\right].$$

(d) A kódszavak

$$(000), \quad (111)$$

so

$$d_{\min} = \min_{c \neq (00\ldots0)} w(c) = 3,$$

tehát a kód $d_{\min} - 1 = 2$ hibát képes detektálni és $\lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor = 1$ hibát képes javítani.

7. feladat

(d) A kódszavak

$$(000), \quad (111)$$

so

$$d_{\min} = \min_{c \neq (00\ldots0)} w(c) = 3,$$

tehát a kód $d_{\min} - 1 = 2$ hibát képes detektálni és $\lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor = 1$ hibát képes javítani.

(e) $$s^T = He^T = \begin{bmatrix} 110 \\ 101 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$E_{(11)} = \{(011), (011) + (111)\} = \{(011), (100)\}$$

8. Feladat

Adott egy $C(7,4)$ bináris szisztematikus Hamming-kód.

(a) Töltsük ki a paritás ellenőrző mátrix hiányzó elemeit:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & * & * & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & * & * & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & * & * & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Mi az (1111) üzenetvektorhoz tartozó kódszó?

8. Feladat

Megoldás.

(a) A kód szisztematikus $\rightarrow$ H-ban a jobb szélső négyzet alakú blokk az identitás mátrix. Az utolsó hiányzó oszlop pedig az utolsó kimaradó nemnulla vektor kell legyen.

$$H = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

8. Feladat

Megoldás.

(b) A generátormátrixhoz pedig használjuk, hogy

$$H = \left[\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}}}_{B^T} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right].$$

jelöléssel $G = (I; B)$ alakú:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

végül

$$(1111) \cdot G = (1111111).$$