

1. Műveletek bináris vektorokkal és kommunikáció Bináris Szimmetrikus Csatornán (BSC)

Kódolástechnika

1. feladat

- (a) Egy BSC-re a bemenet vektor $u = (0010011)$ és a véletlen hiba vektor $e = (1000001)$. A bit hiba valószínűség $P_b = 0.1$. Mi lesz a csatornán a kimenet vektor?
- (b) Mennyi az $e = (1000001)$ hiba vektor valószínűsége?

1. feladat

- (a) Egy BSC-re a bemenet vektor $u = (0010011)$ és a véletlen hiba vektor $e = (1000001)$. A bit hiba valószínűség $P_b = 0.1$. Mi lesz a csatornán a kimenet vektor?
- (b) Mennyi az $e = (1000001)$ hiba vektor valószínűsége?

Megoldás.

- (a) A kimenet vektor a bemenet vektor és a hiba vektor mod 2 összege:

$$\begin{array}{r} 0010011 \\ + 1000001 \\ \hline 1010010 \end{array}$$

1. feladat

- (a) Egy BSC-re a bemenet vektor $u = (0010011)$ és a véletlen hiba vektor $e = (1000001)$. A bit hiba valószínűség $P_b = 0.1$. Mi lesz a csatornán a kimenet vektor?
- (b) Mennyi az $e = (1000001)$ hiba vektor valószínűsége?

Megoldás.

- (a) A kimenet vektor a bemenet vektor és a hiba vektor mod 2 összege:

$$\begin{array}{r} 0010011 \\ + 1000001 \\ \hline 1010010 \end{array}$$

- (b) A hiba vektor valószínűsége

$$P(e = 1000001) = 0.1^2 \cdot (1 - 0.1)^5 \approx 0.005905.$$

2. feladat

- (a) Egy BSC-n $u = (0010011)$ a bemenet vektor és $v = (1010010)$ a megfelelő kimenet vektor. Mennyi a Hamming-távolság u és v között?
- (b) Mi a csatorna által generált véletlen hiba vektor?

2. feladat

- (a) Egy BSC-n $u = (0010011)$ a bemenet vektor és $v = (1010010)$ a megfelelő kimenet vektor. Mennyi a Hamming-távolság u és v között?
- (b) Mi a csatorna által generált véletlen hiba vektor?

Megoldás.

(a)

$$\begin{array}{r} \text{bemenet: } 0010011 \\ \text{kimenet: } 1010010 \\ \phantom{\text{kimenet: }} \downarrow \phantom{\text{kimenet: }} \downarrow \\ \phantom{\text{kimenet: }} 1 \phantom{\text{kimenet: }} + \phantom{\text{kimenet: }} 1 = 2 \end{array}$$

2. feladat

- (a) Egy BSC-n $u = (0010011)$ a bemenet vektor és $v = (1010010)$ a megfelelő kimenet vektor. Mennyi a Hamming-távolság u és v között?
- (b) Mi a csatorna által generált véletlen hiba vektor?

Megoldás.

(a)

bemenet:	0010011
kimenet:	1010010
	↓ ↓
	1 + 1 = 2

(b) $v = u + e \implies e = u + v$

bemenet:	0010011
kimenet:	1010010
hiba:	1000001

3. feladat

- (a) Mi a hiba vektor, ha a bemenet vektor $u = (00100111)$ és a kimenet vektor $v = (10100101)$?
- (b) Ha a csatorna bit hiba valószínűsége $P_b = 0.01$, mi a feltételes valószínűsége, hogy a kimenet vektor $v = (10100101)$, feltéve, hogy a bemenet vektor $u = (00100111)$?

3. feladat

- (a) Mi a hiba vektor, ha a bemenet vektor $u = (00100111)$ és a kimenet vektor $v = (10100101)$?
- (b) Ha a csatorna bit hiba valószínűsége $P_b = 0.01$, mi a feltételes valószínűsége, hogy a kimenet vektor $v = (10100101)$, feltéve, hogy a bemenet vektor $u = (00100111)$?

Megoldás.

- (a) A hiba vektor a bemenet + kimenet mod 2:

$$e = u + v = (10000010)$$

3. feladat

- (a) Mi a hiba vektor, ha a bemenet vektor $u = (00100111)$ és a kimenet vektor $v = (10100101)$?
- (b) Ha a csatorna bit hiba valószínűsége $P_b = 0.01$, mi a feltételes valószínűsége, hogy a kimenet vektor $v = (10100101)$, feltéve, hogy a bemenet vektor $u = (00100111)$?

Megoldás.

- (a) A hiba vektor a bemenet + kimenet mod 2:

$$e = u + v = (10000010)$$

- (b)

$$P(v = (10100101) | u = (00100111)) = P_b^2(1 - P_b)^6 = 0.01^2 \cdot 0.99^6 \approx 0.00009415.$$

4. feladat

Egy BSC-re a bit hiba valószínűség $P_b = 0.2$. Számítsuk ki, hogy legalább hány hibát kell egy kódnak kijavítania, ha a blokk hiba valószínűsége (QoS) legfeljebb 0.001, és a blokk hossz $n = 30$.

4. feladat

Egy BSC-re a bit hiba valószínűség $P_b = 0.2$. Számítsuk ki, hogy legalább hány hibát kell egy kódnak kijavítania, ha a blokk hiba valószínűsége (QoS) legfeljebb 0.001, és a blokk hossz $n = 30$.

Megoldás. A következő jelöléseket használjuk.

- i a helytelen bitek száma 1 blokken belül;
- $30 - i$ a helyes bitek száma;
- t a kód által kijavítani képes hibák maximális száma.

4. feladat

Egy BSC-re a bit hiba valószínűség $P_b = 0.2$. Számítsuk ki, hogy legalább hány hibát kell egy kódnak kijavítania, ha a blokk hiba valószínűsége (QoS) legfeljebb 0.001, és a blokk hossz $n = 30$.

Megoldás. A következő jelöléseket használjuk.

- i a helytelen bitek száma 1 blokken belül;
- $30 - i$ a helyes bitek száma;
- t a kód által kijavítani képes hibák maximális száma.

Meg kell találnunk a legkisebb t értéket, melyre

$$\sum_{i=t+1}^{30} \binom{30}{i} 0.2^i 0.8^{30-i} \leq 0.001.$$

4. feladat

Egy BSC-re a bit hiba valószínűség $P_b = 0.2$. Számítsuk ki, hogy legalább hány hibát kell egy kódnak kijavítania, ha a blokk hiba valószínűsége (QoS) legfeljebb 0.001, és a blokk hossz $n = 30$.

Megoldás. A következő jelöléseket használjuk.

- i a helytelen bitek száma 1 blokkon belül;
- $30 - i$ a helyes bitek száma;
- t a kód által kijavítani képes hibák maximális száma.

Meg kell találnunk a legkisebb t értéket, melyre

$$\sum_{i=t+1}^{30} \binom{30}{i} 0.2^i 0.8^{30-i} \leq 0.001.$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=13}^{30} \binom{30}{i} 0.2^i 0.8^{30-i} \approx 0.00311 \\ \sum_{i=14}^{30} \binom{30}{i} 0.2^i 0.8^{30-i} \approx 0.000902 \end{array} \right\} \implies t = 13.$$

5. feladat

- (a) Hány olyan 5-dimenziós bináris vektor van, melynek a (01010) vektortól vett Hamming-távolsága 3?
- (b) Hány 5-dimenziós bináris vektor van a (01010) középpontú, 3 sugarú gömbben?

5. feladat

- (a) Hány olyan 5-dimenziós bináris vektor van, melynek a (01010) vektortól vett Hamming-távolsága 3?
- (b) Hány 5-dimenziós bináris vektor van a (01010) középpontú, 3 sugarú gömbben?

Megoldás.

(a)

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

5. feladat

- (a) Hány olyan 5-dimenziós bináris vektor van, melynek a (01010) vektortól vett Hamming-távolsága 3?
- (b) Hány 5-dimenziós bináris vektor van a (01010) középpontú, 3 sugarú gömbben?

Megoldás.

(a)

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

(b)

$$\sum_{i=0}^3 \binom{5}{i} = \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} =$$
$$1 + 5 + 10 + 10 = 26.$$

6. feladat

Számítsuk ki a következő vektor súlyát: (000100011000111101000) .

6. feladat

Számítsuk ki a következő vektor súlyát: (000100011000111101000).

Megoldás. A vektor 8 db 1-est tartalmaz, így

$$w(000100011000111101000) = 8.$$

7. feladat

Számítsuk ki a következő mátrix-vektor szorzatot mod 2 aritmetikában.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7. feladat

Megoldás.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(A mátrix 2., 3. és 7. oszlopát kell elemenként összeadni.)

8. feladat

Számítsuk ki a következő mátrix-vektor szorzatot mod 2 aritmetikában.

$$(1001) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8. feladat

Megoldás.

$$(1001) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ (01001110).$$

(A mátrix 1. és 4. sorát kell elemenként összeadni.)