Analízis 2 Mértékelmélet,
7. Gyakorló feladatsor

Integrálás 2.

1. Legyen X egy nem üres halmaz, és legyen δ_a az $a \in X$ pontra koncentrált Dirac-mérték. Mutassuk meg, hogy bármely $f : X \to \mathbb{R}$ függvény integrálható és $\int_X f \, \mathrm{d}\, \delta_a = f(a)$.

2. Legyen μ a számlálómérték $\mathbb{N}$-en. Mutassuk meg, hogy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pontosan akkor integrálható, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$. Mutassuk meg, hogy ekkor $\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\, \mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

3. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények mérhetőek és számítsuk ki a Lebesgue-integráljukat a $(0, \infty)$ intervallumon, ahol $[x]$ jelöli x egész részét!

   (a) $f(x) = e^{-[x]}$

   (b) $f(x) = \frac{1}{[x+1][x+2]}$

   (c) $f(x) = \frac{1}{[x]!}$

4. Mutassuk meg, hogy az alábbi függvények mérhetőek és számítsuk ki a Lebesgue-integráljukat a $[0, 1]$ intervallumon, ahol $[x]$ jelöli x egész részét!

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ [1/x], & \text{ha } x \text{ irracionális,} \end{cases}$$

   (b)
   $$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ [1/x]^{-1}, & \text{ha } x \text{ irracionális,} \end{cases}$$

5. Számítsuk ki a következő függvények Lebesgue-integrálját a $[0, \pi/2]$ intervallumon!

(a) $f(x) = \sin x$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ \cos x, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha } \cos x \text{ racionális} \\ \sin^2 x, & \text{ha } \cos x \text{ irracionális} \end{cases}$$

6. Definiáljuk az f függvényt $x \in (0,1)$-ben a következőképpen:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{ha } n \text{ a legkisebb egész, melyre } x_n = 7, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $x = 0, x_1 x_2 \dots$ a tizes számrendszerben. Mutassuk meg, hogy f integrálható és számítsuk ki az $\int_{(0,1)} f \, \mathrm{d}\,\lambda$ integrált.

7. Legyen

$$F(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 1 \\ 1, & \text{ha } 1 \leq x < 4 \\ 2, & \text{ha } x \geq 4. \end{cases}$$

Számoljuk ki az $\int_{\mathbb{R}} x^2 \, \mathrm{d}\,\mu_F(x)$ integrált, ahol μ_F felöli az F által indukált Borel-mértéket.

8. Határozzuk meg a következő határértékeketet! (Használjuk a Monoton konvergencia-illetve a Dominált konvergencia tételeket!)

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\pi x} \, \mathrm{d}\,\lambda(x)$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x^{\frac{n}{\ln n + 2024}}} \, \mathrm{d}\,\lambda(x)$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + \frac{x}{n})^n \sqrt[n]{x}} \, \mathrm{d}\,\lambda(x)$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} \cos(x^n) \, \mathrm{d}\,\lambda(x)$$