Analízis 2 Mértékelmélet,
6. Gyakorló feladatsor

Integrálás 1.

1. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, f egy nem-negatív mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy minden $E \in \mathcal{A}$ esetén
$$\nu(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\,\mu$$
mértéket definiál.

2. Legyen f egy nem-negatív, korlátos μ-mérhető függvény $[0,1]$-en. Mutassuk meg, hogy
$$\int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\,\mu = \inf \int_{[0,1]} \phi \,\mathrm{d}\,\mu,$$
ahol az infimumot olyan egyszerű ϕ függvényeken vesszük, melyekre $f \leq \phi$.

3. Mutassuk meg, hogy az előző feladat állítása általában nem igaz, ha nem véges mértékteret, például $\mathbb{R}$-et tekintjük a Lebesgue-mértékkel.
(*Javaslat:* Legyen például $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} \chi_{[n,n+1)}$, de jó ellenpélda $f(x) = e^{-x^2}$ vagy $f(x) = \frac{1}{1+x}$ is.)

4. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy véges mértéktér.Mutassuk meg, hogy az $f : X \to \mathbb{R}^+$ mérhető függvény pontosan akkor $L^1(X, \mu)$-beli, ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mu\{x \in X : f(x) \geq 2^n\} < \infty.$$

5. Legyen $f \in L^1(0,1)$. Számítsuk ki a
$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 k \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{k^2}\right) \mathrm{d}\,x$$
határértéket!
(*Javaslat:* Az $\ln(1+t) \leq 2\sqrt{t}$ $(t \geq 0)$ becslés segíthet.)

6. Legyen $f_n, g_n, f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $(n \in \mathbb{N})$. Tegyük fel továbbá, hogy $f_n \to f$ és $g_n \to g$ m.m., $|f_n| \leq g_n$ m.m. és $\int_{\mathbb{R}} g_n \to \int_{\mathbb{R}} g$. Mutassuk meg, hogy $\int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} f$.

7. Tegyük fel, hogy $f_k, f \in L^1(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N})$, $f_k \to f$ m.m. és $\int_{\mathbb{R}} |f_k| \to \int_{\mathbb{R}} |f|$. Mutassuk meg, hogy ekkor bármely $E \in \mathbb{R}$ mérhető halmaz esetén $\int_E f_k \to \int_E f$.

8. Legyen $f \in L^1([0,1])$. Igazoljuk az alábbi állításokat:

   (a) $x^k f(x) \in L^1([0,1])$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén.

   (b) $\lim_{k\to\infty} \int_0^1 x^k f(x) \, \mathrm{d}\, x = 0$.

   (c) Ha $\lim_{x\to 1-0} f(x) = a$ valamely valós a-ra, akkor $\lim_{k\to\infty} k \int_0^1 x^k f(x) \, \mathrm{d}\, x = a$.

9. Legyen (f_n) nem-negatív, Lebesgue-mérhető függvények sorozata az $(0,10)$-en, melyre $f_n(x) \to f(x)$, m.m. $x \in (0,10)$ esetén. Legyen $F(x) = \int_0^x f$ és $F_n(x) = \int_0^x f_n$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_0^{10} (f + F) \leq \liminf_{n\to\infty} (f_n + F_n).$$

10. Legyen f Lebesgue-integrálható $[0,1]$-en és $\epsilon > 0$ tetszőleges. Mutassuk meg, hogy létezik $\delta > 0$ és $E \subset [0,1]$ mérhető, melyre $\lambda(E) < \delta$, hogy

$$\left| \int_E f \, \mathrm{d}\, \lambda \right| < \epsilon.$$

11. Legyen $f \geq 0$ $[0,1]$-en, mérhető függvény. Mutassuk meg, hogy

   (a) $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f^n$ létezik.

   (b) ha $\int_{[0,1]} f^n = C < \infty$ minden $n = 1, 2, \ldots$ esetén, akkor létezik $B \subset [0,1]$ mérhető, hogy $f(c) = \chi_B(x)$ m.m.

12. Legyen $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ $\mathbb{R}$ mérhető részhalmazai. Mutassuk meg, hogy a $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f$ limesz létezik.

13. Legyenek f_n ée f mérhető függvények $[0,1]$-en és $f_n \geq 0$ m.m. $[0,1]$-en. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n e^{-f_n} = \int_{[0,1]} f e^{-f}.$$

   (*Megjegyzés:* A fenti feltételekkel $\int_{[0,1]} f_n \to \int_{[0,1]} f$ nem feltétlenül igaz, ld pl. $f \equiv 0$, $f_n = n\chi_{(0,1/n)}$.)