Analízis 2 Mértékelmélet,
5. Gyakorló feladatsor

Mérhető függvények 2.

1. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egy mértéktér és legyen A $\mathbb{R}$ egy sűrű részhalmaza. Mutassuk meg, hogy $f : X \to \mathbb{R}$ pontosan akkor mérhető, ha az $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ halmaz mérhető minden $a \in A$ esetén.

2. Adjunk példát olyan nem mérhető f függvényre, hogy $|f|$ mérhető és $f^{-1}(\{a\})$ mérhető halmaz minden $a \in \mathbb{R}$ esetén.

3. Legyen (f_n) mérhető függvények sorozata. Mutassuk meg, hogy
   (a) az $\inf_n f_n(x)$ és $\sup_n f_n(x)$ függvények mérhetőek.
   (b) a $\liminf_n f_n(x)$ és a $\limsup_n f_n(x)$ függvények mérhetőek.

4. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ Borel-mérhető. Mutassuk meg, hogy minden monoton $f : A \to \mathbb{R}$ függvény Borel-mérhető.

5. Mutassuk meg, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ m.m. folytonos, akkor f Lebesgue-mérhető.

6. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Mutassuk meg, hogy f' Lebesgue-mérhető.

7. Legyen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Igaz-e, hogy ha a $\{x \in [0, 1] : f(x) = c\}$ halmaz mérhető minden $c \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f mérhető?
   (Útmutatás: Nem igaz. Konstruáljunk ellenpéldát annak a felhasználásával, hogy van $[0, 1]$-nek nem mérhető részhalmaza.)

8. Legyen (f_n) mérhető függvények sorozata az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Legyen
$$E = \{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ létezik}\}.$$
   Mutassuk meg, hogy E mérhető halmaz.

9. Bizonyítsuk be, hogy a számegyenes minden Lebesgue-mérhető halmaza előáll egy Borel-mérhető és egy nullmértékű halmaz egyesítéseként. Ebből következően mutassuk meg, hogy minden a számegyenesen értelmezett mérhető függvény, egy nullmértékű halmazon megváltoztatva, Borel-függvénnyé tehető.

10. Legyen f az $[a, b]$-n értelmezett folytonos függvény, és legyen $n(c)$ az $f(x) = c$ egyenlet megoldásainak száma. Bizonyítsuk be, hogy az $n(c)$ függvény Lebesgue-mérhető!

11. Az f és g valós függvényeket ekvimérhetőnek nevezzük a μ és ν mértékékre nézve, ha bármely $c > 0$ esetén

$$\mu\{x : f(x) < c\} = \nu\{y : g(y) < c\}.$$

Legyen f függvény μ-mérhető és legyen $F(c) = \mu\{x : f(x) \leq c\}$. Mutassuk meg, hogy a $g(y) = \inf_{F(c) \leq y} c$ függvény a $[0, \mu(X)]$ intervallumon nem csökkenő, balról folytonos, és ekvimérhető f-fel.

12. Definiáljuk az $f : [0, 1] \to [0, 1]$ függvényt a következőképpen. Ha $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ az $x \in [0, 1]$ 10-es számrendszerbeli felírása, amelyben végtelen sok jegy különbözik 9-től, akkor legyen

$$f(x) = \limsup_{n \to \infty} \frac{A_n}{n},$$

ahol A_n jelöli a 7-esek számát az első n jegy között. Lássuk be, hogy f Borel-mérhető.