

- 7.1 Sok intelligencia teszt normális eloszlást követ, 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. Ha ezeknek a teszteknek és értékelésüknek hihetünk, akkor az emberiség hány százalékának van 95 és 110 pont között az IQ-ja? A 100 pont körüli mekkora intervallumban van az emberiség 50%-ának az IQ-ja? Egy 2500 fős településen várhatóan hány embernek lesz 125 pont fölött az IQ-ja?
- 7.2 Az IQ teszteknek még mindig hiszünk és tegyük fel, hogy az eredmény 100 pont várható értékű és 15 szórással normális eloszlást követ. A tesztek megírt és kiértékelt alanyokat általában 3 csoportba szokták sorolni: alacsony-, átlagos-, illetve magas intelligenciahányadosúak. A résztvevőknek rendre 20, 65 illetve 15%-a került a megfelelő csoportokba. Hol húzták meg a határokat, azaz melyek azok a pontszámok melyek megkülönböztetik az egyes csoportokat?
- 7.3 Tegyük fel, hogy  $X$  normális eloszlású 5 várható értékkel. Ha  $\mathbf{P}\{X > 9\} = 0.2$ , közelítőleg mennyi  $X$  szórásnégyzete?
- 7.4 •• Tegyük fel, hogy a 25 éves fiatalok magassága centiméterben mérve normális eloszlású,  $\mu = 178$  és  $\sigma^2 = 144$  paraméterekkel. A 25 éves fiatalok hány százaléka magasabb 2 méternél? A két méteres klub tagjainak hány százaléka magasabb 2 méter 10 cm-nél?
- 7.5 Mutassuk meg, hogy  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ . (Tipp:  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$ . Helyettesítsünk  $y = \sqrt{2x}$ -et és hasonlítsuk össze az így kapott kifejezést a normális eloszlással!)

Bónusz: Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált „abszolút momentumait” ( $\varphi$  a standard normális sűrűség):

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) |y|^k dy, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

(Tipp: páros  $k = 2\ell$ -re számoljuk ki és használjuk a következő kifejezést:

$$\left. \frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2} dy \right|_{\lambda=1}.$$

Páratlan  $k = 2\ell + 1$ -re hajtsuk végre a  $z = y^2$  változócsere az  $A_k$ -t definiáló integrálban.)

- 7.6 Legyen az  $X$  valószínűségi változó normális eloszlású  $\mu$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással. Számoljuk ki  $t \in \mathbb{R}$ -re az  $\mathbf{E}(e^{tX})$  várható értéket! (Tipp: ez egy egyszerű integrálhelyettesítéssel visszavezethető a normális sűrűségfüggvény integráljára.)
- 7.9 Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 100.000 pókerleosztás során a fullok száma 128 és 158 közé essen.
- 7.10 •• Egy gyár kétfajta érmét gyárt: egy igazságot és egy hamisat, ami 57% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk, igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 535-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 535-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?
- 7.11 Egy nagyváros lakosságának általunk ismeretlen  $p$  hányada dohányzik. Ezt a  $p$  hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal a következő módon: megkérdezzük  $n$  véletlenszerűen kiválasztott lakost, és megállapítjuk, hogy ezek között  $k$  állítja, hogy dohányzik. A NSZT-ből tudjuk, hogy ha  $n$  elég nagy, akkor az empirikusan megfigyelt  $p' := k/n$  relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti az igazi  $p$  hányadot. Milyen nagynak kell  $n$ -et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empirikusan megfigyelt  $p'$  relatív gyakoriság legalább 0.93 valószínűséggel 0.02 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen)  $p$  hányadot? Más szóval: határozzuk meg azt a legkisebb  $n_0$  természetes számot, amelyre igaz, hogy bármely  $p \in (0, 1)$ -re és  $n \geq n_0$ -ra

$$\mathbf{P}\{|p' - p| \leq 0.02\} \geq 0.93.$$

- 7.12 Az előző feladat kicsit máshogy ☹

Budapest utcáin az emberek 42%-a támogatná, hogy közterületen ne lehessen dohányozni. Közelítsük azt a valószínűséget, hogy  $n$  megkérdezett ember közül legalább 40% a betiltás mellett nyilatkozik, ha

a)  $n = 11$ ,

b)  $n = 101$ ,

c)  $n = 1001$ .

d) Hány embert kellene megkérdeznünk, hogy legalább 95% eséllyel 40% felett legyenek a betiltást támogatók?

- 7.13 •• Az ún. Monte Carlo-integrálás lényege a következő: legyen az egyszerűség kedvéért  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  folytonos függvény, és az

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

integrál értékét becsüljük. Ha  $U$  és  $V$  két független  $[0, 1]$  intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor az  $(U, V)$  pár a  $[0, 1]^2$  egységnégyzet egy véletlen pontját adja. Függetlenül generálva  $n$  véletlen pontot az egységnégyzetben, jelölje  $X_n$  azon pontok számát, amelyek az  $f$  függvény grafikonja alá estek, vagyis amelyekre  $V < f(U)$ . Ekkor  $I$  becslését az  $X_n/n$  hányados adja. Mekkora  $n$  értékét, ha azt szeretnénk, hogy legfeljebb 0.02 valószínűséggel kapjunk 0.1-nél nagyobb hibát, ha a Monte Carlo-integrálás módszerét

a) az  $f(x) = x^3$  függvényre alkalmazzuk?

b) egy ismeretlen  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  folytonos függvényre alkalmazzuk?

7.14 Van két egyforma biztosítótársaság egyenként tízezer ügyféllel. A 2007-es év elején minden ügyfél befizet a biztosítójának ötvenezer forintot, és az év folyamán minden ügyfél egymástól függetlenül  $\frac{1}{3}$  valószínűséggel nyújt be kárigényt, amely minden esetben 150 ezer forint. Mindkét biztosítótársaságnak van ezen felül 5 millió forint félretett pénze az előző évről. Egy biztosítótársaság csődbe megy, ha nem tudja kifizetni a beérkező kárigényeket. Érdemes-e egyesülnie a két biztosítótársaságnak? Legyen  $p_1$  annak a valószínűsége, hogy a két biztosítótársaság közül legalább egy tönkremegy, és  $p_2$  annak a valószínűsége, hogy az egyesült biztosítótársaság tönkremegy. Határozzuk meg  $p_1$  és  $p_2$  (közelítő) értékét, és vonjuk le a következtetést!

7.15 (A Poisson eloszlás normális approximációja.) Bizonyítsuk be, hogy  $\lambda \rightarrow \infty$ -re

$$\sqrt{\lambda} \cdot p_{\text{Poi}(\lambda)}(\lfloor \lambda + x\sqrt{\lambda} \rfloor) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) + \mathcal{O}(\lambda^{-1/2}),$$

és a hibátág egyenletesen kicsi, ha  $x$  egy korlátos halmazban marad. Következményként lássuk be, hogy

$$\sum_{\lambda + \alpha\sqrt{\lambda} < k < \lambda + \beta\sqrt{\lambda}} p_{\text{Poi}(\lambda)}(k) \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(y) dy = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

amint  $\lambda \rightarrow \infty$ .

7.16 •• A menzai poharak kirakásuktól számított törési ideje exponenciális eloszlást követ 24 hónap várható értékkel. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy

a) 5 kirakott pohárból legfeljebb 3 törik el egy év alatt;

b) 500 kirakott pohárból legfeljebb 210 törik el egy év alatt! (Adjuk meg a numerikus értéket is!)

7.17 A valszámium radioaktív bomló részecske átlagos élettartama 1 év. Mennyi ennek a részecskefajtának a felezési ideje?

7.18 A „Fény az éjszakában” típusú villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. A gyártó mérései szerint a körték 90 százaléka bírja legalább egy évig. Mennyi időre vállalhat a gyártó garanciát a körték működésére, ha azt akarja, hogy a vevőknek legfeljebb 1 százaléka reklamáljon?

7.19 Reggel a földalatti szerelvények követési ideje exponenciális eloszlású valószínűségi változó 2 perc várható értékkel. Az egyik szerelvényt pont lekéstem.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5 percet várnom kell a következőre?

b) Már 3 perce várok hiába. Mennyi a valószínűsége, hogy még további 5 percig várnom kell?

7.23 Egy nagyon gyors számítógépen futó program, miután elindult, minden órajel hatására (vagyis nagyon gyakran) megpróbál lefagyni – feltéve, hogy ez korábban nem sikerült neki – és valamilyen nagyon kicsi valószínűséggel le is fagy. A tapasztalat szerint ez a program az indítás után átlagosan 1 órával fagy le. Mi a lefagyásig eltelt (órában mért) idő eloszlása?

7.24 Pistike nyári estéken csillaghullást néz. Egy-egy nyári estén nagyon sok meteor éri el a Földet, ezek mindegyikének egymástól függetlenül, nagyon kis valószínűséggel sikerül Pistike szeme elé kerülni – vagyis pont akkor és ott esni le, amikor és ahol Pistike látja. Így ő fél óra alatt átlagosan hármát lát lehullani. Augusztus 19-én este 22:00-kor kezdi nézni az eget.

a) Mi a valószínűsége, hogy 22:00 és 22:25 között egyetlen hullócsillagot sem lát?

b) Mi a valószínűsége, hogy  $T$  perc alatt egyetlen hullócsillagot sem lát, ahol  $T \in \mathbb{R}^+$ ?

c) Az  $X$  valószínűségi változó legyen az az idő (percben mérve), amennyit Pistikének az első hullócsillag megpillantására várnia kell. Számoljuk ki  $X$  eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

d) Fogalmazzuk meg szépen a tanulságot!

7.25 •• A HOMÁLY cég kétféle kompakt fénycsövet forgalmaz, az A és B típusok várható élettartama rendre 6000, illetve 10000 óra, mindkét esetben exponenciális eloszlással.

a) Egy egyetemi előadóterem két lámpájában egyszerre cserélik a fénycsöveket, tehát ha az egyik fénycső kiég, mindkettőt lecserélik. A legutóbbi csere alkalmával az egyik lámpába A, a másikba B típusú fénycső került. Mi a valószínűsége, hogy a következő cserére kevesebb, mint 3000 óra elteltével lesz szükség? És ha tudjuk, hogy a legutóbbi csere óta 2000 óra telt el, mi a valószínűsége, hogy további 3000 óráig nem lesz szükség cserére? (Az egyes fénycsövek élettartama függetlennek tekinthető.)

b) A takarékoság jegyében a doktorandusz szobába egy olcsó boltból szerzik be a fénycsövet, ahol azokat csomagolás nélkül, a rendetlenség miatt jól összekeveredve tárolják. A kupac 15%-a "selejtes", be se kapcsol, a maradék egyenlő arányban A, illetve B típusú. Vaktában választva, mi lesz a doktorandusz szobába kerülő fénycső élettartamának eloszlásfüggvénye?

c) Mi a valószínűsége, hogy a doktorandusz szobába kerülő fénycső több, mint 3000 óráig bírja? És ha ez a fénycső már kibírt 2000 órát, mi a valószínűsége, hogy még további 4000 óráig bírni fogja?