4.1 •• Legyen $K \geq 1$ rögzített. K dobozba helyezünk el $(K^2+K)/2$ golyót úgy, hogy az egyes dobozokba rendre $1, 2, \ldots, K$ golyó kerül. Válasszunk ki véletlenszerűen egy golyót; ekkor jelölje X azt, hogy összesen hány golyó van abban a dobozban, amelyben a kiválasztott golyó is található. Válasszunk véletlenszerűen egy dobozt, és jelölje Y, hogy ebben a dobozban hány golyó van.

a) Mit gondolunk, X vagy Y várható értéke nagyobb? Miért?

b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X)$-et és $\mathbf{E}(Y)$-t!

c) Számoljuk ki $\mathbf{D}^2(X)$-et és $\mathbf{D}^2(Y)$-t is!

4.3 Minden este több különböző meteorológus jósolja meg, mekkora valószínűséggel fog holnap esni az eső. Hogy megítéljük, mennyire jók a meteorológusok, a következőképpen pontozzuk őket: ha egy meteorológus p valószínűséggel jósolt esőt, akkor

$$\begin{array}{ll} 1-(1-p)^2 & \text{pontot kap, ha valóban esik másnap,} \\ 1-p^2 & \text{pontot kap, ha nem esik.} \end{array}$$

Ezek után egy rögzített időszakban mérjük az egyes meteorológusok átlagpontszámát, és a legjobb előrejelző a legmagasabb pontszámot kapott meteorológus lesz. Tegyük fel, hogy az egyik meteorológus tudja ezt, és maximalizálni szeretné átlagát. Ha azt gondolja, hogy p^* valószínűséggel fog esni holnap, mekkora p értéket érdemes jelentenie?

4.4 Egymás után tízszer dobunk egy szabályos érmével. Legyen X az egymás utáni egyforma kimenetelekből álló sorozatok száma, vagyis pl. csupa fej esetén $X = 1$, a $FFIIIIFIFF$ sorozatnál pedig $X = 5$. Határozzuk meg X eloszlását.

4.5 Egy csütörtöki buliba az n meghívott mindegyike a többiektől függetlenül $1/2$ valószínűséggel jön el. Mennyi a valószínűsége, hogy a meghívottak legalább fele eljön? És, ha a hónap négy csütörtökjén szervezek bulit, mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz legalább kettő, amin elegen leszünk (azaz a meghívottak legalább fele eljön)?

4.6 Két kockával (egyik piros, másik zöld) dobva, mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke? Dobtam a két kockával, háromszor: az egyik kockát, a pirosat mindig meglestem, hihetetlen, de mindháromszor 3-as szerepelt rajta. Mi a valószínűsége, hogy legalább egyszer nagyobb volt, mint a zöldön lévő, éppen akkor dobott szám?

4.7 n darab k-lapú „kockával” dobva mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke? Vizsgáljuk a várható értékekre kapott kifejezések asszimptotikáját rögzített n mellett, amint $k \to \infty$.

4.8 ••

a) Háromszor dobunk egy hamis érmével, amin a fej valószínűsége $4/5$. Jelölje U azt a számot, ahányszor sikerül az előző dobást megismételnünk. (Így U értéke 0, 1 vagy 2 lehet.) Számoljuk ki U várható értékét és szórását!

b) Tizenkétszer dobunk egy hamis érmével, amin a fej valószínűsége $5/6$. Minden Írás eredmény után fizetnünk kell 800 Ft-t, viszont minden Fej eredmény után kapunk 500 Ft-t. Számoljuk ki a nyereményünk várható értékét és szórását!

4.9 Legyen $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, számoljuk ki

a) $\mathbf{E}(2+X)^2$-t és

b) $\mathbf{D}^2(4+3X)$-t.

4.10 N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melyre $\mathbf{E}(N) < \infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i).$$

(*Tipp:* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{k=i}^{\infty} \mathbf{P}(N = k)$. *És most szummacsere!*)

4.11 •• N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melyre $\mathbf{E}(N^2) < \infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{P}(N > i) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}(N)\big).$$

4.12 N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melyre $\mathbf{E}(N^3) < \infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2\mathbf{P}(N \geq i) = \frac{\mathbf{E}(N^3)}{3} + \frac{\mathbf{E}(N^2)}{2} + \frac{\mathbf{E}(N)}{6}.$$

4.13 Egy m családból álló közösségben n_i családban van i gyerek ($\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = m$). Legyen X egy véletlenszerűen választott családban a gyerekek száma. Válasszunk ki véletlenszerűen a $\sum\limits_{i=1}^{r} in_i$ gyerek közül egyet; jelölje Y azt, hogy a kiválasztott gyerek családjában hány gyerek van. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(Y) \geq \mathbf{E}(X)$.

4.14 6-szor feldobunk egy hams pénzérmét, ami 70% valószínűséggel ad fejet. Ha tudjuk, hogy összesen 3-szor lett fej az eredmény, mi a valószínűsége, hogy

a) az első dobás fej;

b) az első 3 eredmény rendre F, I, I (azaz az első fej, a második és a harmadik írás);

c) az első 3 eredmény rendre I, F, I;

d) az első 3 eredmény rendre I, I, I volt?

4.15 Egy bulvárlapban oldalanként várhatóan 0.2 nyomtatási hiba van. Mi a valószínűsége annak, hogy a következő oldalon

a) 0,

b) 2 vagy több hiba van?

Indokoljuk a választ!

4.16 Egy havonta megrendezett népszerű nyereményjátékban a legnagyobb nyeremény egy okostelefon. Ennek azonban kicsi a valószínűsége: 100 000 szelvény közül átlagosan 1 nyer telefont. Havonta 300 000 szelvényt vásárolnak.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott hónapban legalább 7 szelvény is okostelefont ér?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott évben legalább 2 hónapban lesz legalább 7 okostelefont érő szelvény?

c) Legyen a mostani hónap az 1., mi a valószínűsége annak, hogy először az i. hónapban lesz legalább 7 okostelefont érő szelvény? $(i \geq 1)$

4.17 Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 0.99 valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

4.18 •• Lovas gátversenyen a lovasok körpályán versenyeznek, és a ló a pályán elhelyezett sok akadály mindegyikét egymástól függetlenül azonos valószínűséggel veri le. Ha 8% annak valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy egy körben legalább három akadályt lever?

4.19 London központi kerületében bekövetkező autóbalesetek száma száraz napos időben $\lambda = 10$ paraméterű Poisson-eloszlású, míg nedves esős időben $\mu = 20$ paraméterű Poisson-eloszlású. Kora novemberben Londonban $p = 0.6$ valószínűséggel van ronda esős idő (egész nap), $q = 0.4$ a valószínűsége annak, hogy verőfényes napsütés van (szintén egész nap). Azt olvastam a *Times*-ban, hogy múlt csütörtökön 17 autóbaleset történt London központjában. Mennyi a valószínűsége annak, hogy esett az eső?

4.20 Egy nagy virágágyásba sok virágmagot szórunk egyenletesen. Később a virágágyást sok kis egyenlő méretű darabra osztjuk. Azt tapasztaljuk, hogy a kis darabok 10%-ába nem került egyetlen mag sem.

a) Hány magot szórtunk ki földdarabonként átlagosan?

b) A földdarabok hány százalékában lesz egynél több mag?

4.21 •• A falunapon igen rossz minőségű meggyes pitét osztogatnak. A falunapra kilátogatók közül 100 fő pontosan egy szem meggyet, további 40 fő pedig pontosan két szem meggyet talált a sütijében. Ezek alapján becsüljük meg, összesen hány ember kapott meggyes pitét a falunapon.

4.22 A ”Kocogj velünk!” mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

Bónusz: Az árokugró versenyfutás szabályai a következők: A futópálya egyenes, és van rajta végtelen sok egyforma árok. Két egyforma képességű versenyző méri össze az erejét árokfutásból, akik fej fej mellett futnak. Egy versenyző egymás után át próbálja ugrani az árkokat, végül egyszer túl kicsit ugrik és beleesik valamelyikbe. Tegyük fel, hogy egy versenyző sohasem fárad el, és az árkokat egymástól függetlenül, egyenként 2^{-L} valószínűséggel tudja átugorni, ahol L az árok hossza. Ha az egyikük beleesett egy árokba, akkor véget ért a verseny.

a) Mutassuk meg, hogy a döntetlen valószínűsége pontosan akkor kisebb ε-nál, ha

$$L < \log_2 \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)$$

teljesül.

b) Ha döntetlen, akkor visszaküldjük őket a startvonalhoz és újra kezdődik a verseny. Ezt ismételjük egészen addig, amíg győztest nem hirdethetünk. Mekkora legyen L, ha a versenyzők ugrásainak számának várható értékét akarjuk minimalizálni?