Félévi időbeosztás [házi feladat beadási határidőkkel]
Figyelem! Az időbeosztás az év során változhat, pld a HF beadási határidőket az oktatók esetleg módosíthatják!
Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2023 ősz

-vel kezdődő hét	**Előadás** H 12-14, KF81 Bálint Péter	**Fizgyak** K 12-14, H406 Ráth Balázs	**Matgyak** K 14-16, H601 Ráth Balázs
Szept. 4	E1	Gy1	Gy1
Szept. 11	E2	**Oktatási szünet**	**Oktatási szünet**
Szept. 18	E3	Gy2 **[1. HF]**	Gy2 **[1. HF]**
Szept. 25	E4	Gy3 **[2. HF]**	Gy3 **[2. HF]**
Okt. 2	E5	Gy4 **[3. HF]**	Gy4 **[3. HF]**
Okt. 9	E6	Gy5 **[4. HF]**	Gy5 **[4. HF]**
Okt. 16	E7	Gy6	Gy6
Okt. 23	**Oktatási szünet**	Gy7 **[5. HF]**	Gy7 **[5. HF]**
Okt. 30	E8	Gy8 **[6. HF]**	Gy8 **[6. HF]**
Nov. 6	E9	Gy9 **[7. HF]**	Gy9 **[7. HF]**
Nov. 13	E10	Gy10 **[8. HF]**	Gy10 **[8. HF]**
Nov. 20	E11	Gy11**[9. HF]**	Gy11 **[9. HF]**
Nov. 27	E12	Gy12 **[10. HF]**	Gy12 **[10. HF]**
Dec. 4	E13	Gy13 **[11. HF]**	Gy13 **[11. HF]**

Előadás napló

09.04 Bevezető példák. Eseménytér, mértékelmélet, egyszerű állítások. Véges eseménytér, egyenlő valószínűségű elemi események. Szita formula.

09.11 Feltételes valószínűség, Szorzási szabály, Bayes-tétel, függetlenség.

09.18 Független kísérletek. Feltételes függetlenség. Diszkrét valószínűségi változók. Binomiális és geometriai eloszlás. Várható érték.

09.25 Val. változó függvényének várható értéke. Szórásnégyzet. Várható érték és szórás viselkedése lineáris átskálázásra. Indikátor változó és binomiális eloszlás szórása. Bernoulli Nagy Számok Törvénye. Poisson eloszlás. Binomiális approximációja Poisson-nal.

10.02 Példák Poisson eloszlásra. Poisson eloszlás várható értéke, szórása. Poisson folyamat definíciója, példák. Geometriai eloszlás szórása, örökifjúsága. $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$. Független változókra $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$ és $\mathbb{D}^2(X+Y) = \mathbb{D}^2X + \mathbb{D}^2Y$.

10.09 Negatív binomiális és hipergeometrikus eloszlás. Eloszlásfüggvény és tulajdonságai, példák. Abszolút folytonos valószínűségi változók, sűrűségfüggvény. Folytonos várható érték, szórás. Egyenletes eloszlás.

10.16 Bertrand-féle paradoxon. Standard normális eloszlás és tulajdonságai. Standardizálás. μ várható értékű és σ szórású normális eloszlás. De Moivre-Laplace tétel és alkalmazásai.

10.30 Exponenciális eloszlás; momentumok, örökifjúság, kapcsolat a Poisson folyamattal, geometriai eloszlással. Felezési idő, medián. Eloszlástranszformációk. Standard Cauchy eloszlás. Együttes diszkrét és folytonos eloszlások. Marginális eloszlások. Független valváltozók. Példák.

Ajánlott irodalom

Az elsődleges forrás, amit az elődások beosztása is viszonylag pontosan követ, a Balázs Márton – Tóth Bálint jegyzet. Más könyvjavaslatokkal együtt a kurzus honlapján megtalálható:
`http://www.math.bme.hu/~pet/valszam/Vsz2023.html`.

HF feladatsor témák

Ez csak körülbelüli iránymutató. Az előadás menetétől függően a témák esetleg vándorolhatnak, régebbi témák mindig visszatérhetnek, a fő csapásiránytól eltérő érdekességek fölbukkanhatnak.

1. Alapvető kombinatorika, szita-formula, eseménytér, egyenlő valószínűségű események
2. Feltételes val., Bayes tétel, (feltételes) függetlenség
3. Diszkrét valváltozók 1. Binomiális, geometriai, negatív binom, hipergeom.
4. Diszkrét valváltozók 2. Várható érték és szórás, Poisson eloszlás
5. Poisson folyamat, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, esetleg egyenletes eloszlás

   (ZH1 itt)
6. Egyenletes eo, normális eloszlás, binomiális és Poisson eloszlás normális approximációja, deMoivre-Laplace
7. Exponenciális eloszlás, Poisson folyamat megint, Cauchy és lognormális eloszlás, eloszlástranszformációk
8. Diszkrét és folytonos együttes eloszlások, többdimenziós eloszlástranszformációk
9. Többdimenziós eloszlástranszformációk, függetlenség és konvolúció, feltételes eloszlások, feltételes várható érték
10. Összegek várható értéke, szórása, kovarianciák, korrelációk, indikátorok összege

    (ZH2 valószínűleg itt)
11. Többdimenziós normális és korrelációi (ez talán átcsúszhat az utolsó gyakra)
12. Utolsó gyakorlaton meglátjuk, lehet csak gyakorlás, vagy kitekintés más témákra, ízlés szerint.

Házi feladatok

Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2023 ősz

Minden feladatsoron megjelöljük a *beadandó házi feladatok*at, ezek 1 (•), 2 (••), 3 (•••) vagy 4 (••••) pontot érnek, összesen 10 pont értékben. Természetesen gyakorlásképpen javasoljuk a többi feladat beadás nélküli megoldását is. Egyes heteken szerepelnek bónuszfeladatok, ezek darabonként 3 pontot érnek. Függetlenül a többi feladattól, ezek az adott héten minden esetben beadhatók, és mindig kijavítjuk őket. A házi feladatok beadási határideje az első oldalon szerepel.

Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az *igazi* csoportmunka hasznos, de ebben az esetben mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek ZH-kon és a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

1. HF:

1.1 Hányféle (esetleg értelmetlen, de különböző) szót lehet kirakni a MISSISSIPPI betűiből (mindegyik betűt pontosan egyszer felhasználva)? Hát az ABRAKADABRA szó betűiből? Mi annak a valószínűsége, hogy ha felírjuk a betűket egy-egy kártyára, akkor jól megkeverve a paklit, a két szó egymást követve értelmesen kiolvasható lesz (abrakadabramississippi vagy fordítva)?

1.2 **a)** Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú?
b) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú, ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?
c) És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?
d) Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

1.3 Egy tánciskolába 12 hölgy és 13 úriember jár. Ha 6 hölgyet és 6 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?

1.4 Egy társaság 8 nőből és 7 férfiból áll. Belőlük kell egy 4 nőből és 3 férfiból álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha

a) van két férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni,

b) van két nő, akik nem hajlandók egy bizottságban dolgozni,

c) van egy nő és egy férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni?

1.5 Egy árverésen 4 műgyűjtő vásárolt összesen 5 Dalit, 6 van Goghot, és 7 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?

1.6 **a)** Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára olymódon, hogy n emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

b) Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

azonosságot $n = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra: n emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

- válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,
- válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

c) A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3\binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

1.7 Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 26%	I és II: 6%	I és II és III: 2%
II: 18%	I és III: 9%	
III: 22%	II és III: 5%	

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

a) Határozzuk meg, hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.

b) Hányan olvasnak pontosan egy újságot?

c) Hányan olvasnak legalább kettő újságot?

d) Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

e) Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

1.8 **a)** Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

ha $\mathbf{P}\{A\} \geq 0.8$ és $\mathbf{P}\{B\} \geq 0.6$, akkor $\mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.4$.

b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

1.9 **a)** n golyót helyezünk véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres?

b) n befektetési egységet osztunk szét k részvény között. Befektetési stratégiáknak nevezzük a befektetési egységek lehetséges kiosztásait, vagyis amikor minden részvényre megadjuk, hogy abba hány egységet fektetünk be. Ha minden befektetési stratégia azonos valószínűségű, mi az esélye annak, hogy pontosan egy olyan részvény lesz, amelybe egyetlen egységet sem fektetünk be?

1.10 Egy régi vágású színházban a fogasra akasztják az érkező urak a kalapjaikat. Kifelé menet minden úr véletlenszerűen levesz egy kalapot a fogasról, és távozik. Mi annak a valószínűsége, hogy senki nem megy haza a saját kalapjában? Hogyan viselkedig ez a valószínűség aszimptotikusan amint $n \to \infty$?

1.11 •• Válasszuk ki véletlenszerűen egy 10×10-es mátrix 10 különböző elemét. Mi a valószínűsége, hogy ennek a 10 elemnek a szorzatát figyelembe kell vennünk a mátrix determinánsának kiszámításánál? (Emlékeztető lineáris algebrából: akkor és csak akkor kell figyelembe venni ezt a szorzatot, ha minden sorból és minden oszlopból egy elemet választottunk.)

1.12 **a)** Hatszor feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az $1, 2, ..., 6$ eredmények mindegyike előfordul?

b) Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az $1, 2, ..., 6$ eredmények mindegyike (legalább egyszer) előfordul?

1.13 Gombóc Artúr a hét öt munkanapjára vásárolt magának 45 csokoládé szeletet, 9 különböző ízesítésben (mogyorós, narancsos, ... , karamellás), midegyik fajtából pontosan ötöt. Artúr kissé mohó, és már hétfőn elfogyaszt a 45 szeletből 15-öt, véletlenszerűen kiválasztva. Mi a valószínűsége, hogy

a) • mind az öt mogyorós szeletet már hétfőn megeszi?

b) •• a 9 különböző fajta egyikére sem igaz, hogy abból mind az öt szeletet már hétfőn megeszi? (Azaz: nem eszi meg hétfőn sem az öt mogyorósat, sem az öt narancsosat ... sem az öt karamellását?)

1.14 Egy közösségben 20 család van: 5 családban egy gyerek van, 7 családban kettő, 4 családban három, 3 családban négy, 1 családban öt.

a) Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek van, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$?

b) Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$?

1.15 Egy erdőben 18 őz lakik, közülük 5 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 4-et befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?

1.16 Számoljuk ki a poker különböző értékelhető konfigurációinak valószínűségeit. Azaz 52 lapos francia kártyából ($\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K, A$) véletlenszerűen kiválasztunk ötöt. Mi annak a valószínűsége, hogy egy párunk, két párunk, drillünk, sorunk, flush-ünk, fullunk, pókerünk, színsorunk, royal flush-ünk van?

1.17 A bridzsben az 52 lapos fracia kártyából minden játékos 13–13 lapot kap. Mi a valószínűsége annak, hogy Északnak és Délnek *együttesen* k db ásza van ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)?

1.18 Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$?

1.19 Egy kisvárosban n TV-szerelő dolgozik. Egy napon k helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$?

Bónusz: Jelölje f_n azt a számot, ahány n hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje P_n ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.

a) Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$-re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ahol $f_0 = 1, f_1 = 2$. (Hány ilyen sorozat indul fejjel, és hány írással?)

b) Határozzuk meg P_n-t f_n segítségével, és ezek alapján számoljuk ki P_{10} értékét.

c) Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ és határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}}$ határértéket.

1.20 Egy urnában van 6 piros, 6 fehér, és 7 kék golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?

1.21 Anna, Bori és Cili egyforma erejű pingpongjátékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll, és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel… Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Ezt mindaddig folytatják, amíg nem nyer valamelyikük kétszer egymás után, ő lesz a körmérkőzés győztese. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?

1.22 •• Anna, Bori, Cili és Dóri érmét dobálnak, felváltva egymás után, Anna kezd, majd Bori dob, aztán Cili, utána Dóri, majd megint Anna, és így tovább. Ezt mindaddig folytatják, míg valaki fejet nem dob.

a) Írjuk le az eseményteret!

b) Írjuk le az alábbi eseményeket az eseménytéren: $A = \{$ Anna nyer $\}, C = \{$ Cili nyer $\}$, $(A \bigcup C)^c$!

1.23 A lóversenyen 7 ló indul. Jelölje C azt az eseményt, hogy Csillag az első három hely valamelyikén ér be, R pedig azt, hogy Ráró a 2. helyen végez. Mennyi $C \bigcup R$ valószínűsége? Hány elemi eseményt tartalmaz $C \bigcup R$?

1.24 Kiosztunk egy pakli jól megkevert francia kártyát. Mi a valószínűsége, hogy

a) a pikk ász a 14. kiosztott lap?

b) az első kiosztott ász a 14.-ként kiosztott lap?

c) az első négy lap különböző színű?

d) az első négy lap különböző figurájú?

1.25 Van két kockánk, amelyeket azonos módon színeztünk ki: két lapot pirosra, kettőt zöldre, egyet pedig sárgára, a maradék fehér. Ha feldobjuk őket egyszerre, mi a valószínűsége, hogy ugyanolyan színűre esnek? Mi a valószínűsége annak, hogy az első két feldobásra különböző színűek lesznek, majd harmadszorra ugyanolyanok?

1.26 •• András, Béla és Csaba két dobókockával (egy piros és egy sárga dobókockával) játszanak. Ha a piros kockán nagyobb szám áll, mint a sárgán, András nyer, ha a sárga kockán nagyobb szám áll, mint a piroson, Béla nyer, ha a két kockán azonos szám áll, Csaba nyer. 10-szer dobnak (minden alkalommal a két kockával egyszerre). Mi a valószínűsége, hogy mindhárman nyernek legalább egyszer?

1.27 • 6 férfit és 6 nőt véletlenszerűen két azonos létszámú csoportba osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a két csoportban 3–3 nő, illetve férfi lesz?

1.28 Van 10 mentolos és 10 citromos cukorkánk, ezt a 20 cukrot véletlenszerűen elosztjuk Anna és Bea között. Ha mindkét lány 10 cukrot kap, mi a valószínűsége, hogy

a) mind a 10 mentolos cukrot Anna kapja?

b) mindkét lány pontosan 5 mentolos és pontosan 5 citromos cukrot kap?

1.29 Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

a) nincsen teljes pár,

b) pontosan egy teljes pár van,

c) pontosan két teljes pár van?

1.30 A bridzs játékban a négy, égtájakkal azonosított játékos mindegyikének 13 lapot osztanak ki egy 52 lapos francia kártyából. Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy egy bridzsleosztásban Északnak semmilyen értékből se legyen meg mind a négy kártyája (azaz ne legyen se négy 2-e, se négy 3-a,...., se négy K-a, se négy A-a).

2. HF:

2.1 •• Feldobunk négy szabályos dobókockát .

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik kockán hatos van?

b) Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyiken hatos van?

2.2 Egy piros, egy kék, és egy sárga szabályos kockával dobunk. Legyen az általuk mutatott három szám rendre P, K, S.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás különböző?

b) Feltéve, hogy mindhárom dobás különböző, mi a valószínűsége, hogy $P < K < S$?

c) Mennyi $\mathbf{P}\{P < K < S\}$?

2.3 A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 kártyalap van, minden színből 5. Kiosztunk $5-5$ lapot.

a) Még nem néztem meg a lapjaimat. Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?

b) Megnéztem a lapjaimat: két pirosat és három zöldet kaptam. Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?

2.4 Vigyázat! Ebben a feladatban attól függően, milyen kísérlettel modellezzük a „véletlenszerű én” és a „véletlenszerű király” kiválasztását, különböző eredményeket kaphatunk. A megoldás része pontosan leírni azt is, hogy milyen kísérletben gondolkodunk és milyen feltevésekkel élünk.

a) Én kétgyerekes családból származom. Mi a valószínűsége, hogy a testvérem lány?

b) A király kétgyerekes családból származik. Mi a valószínűsége, hogy a testvére lány?

2.5 Két golyó mindegyike egymástól függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel feketére vagy aranyszínűre lett festve, majd egy urnába helyezték őket.

a) Tegyük fel, hogy tudomásunkra jut, hogy az aranyszínű festéket használták, azaz legalább az egyik golyó aranyszínű lett. Ekkor mi a feltételes valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

b) Most tegyük fel, hogy az urna megbillent, az egyik golyó kigurult belőle, és azt látjuk, hogy ez a golyó aranyszínű. Ekkor mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

Magyarázzuk meg a válaszunkat.

2.6 Egy internetes közösségi szájt felhasználói körébe meghívásos alapon lehet bejutni. Eredetileg két tagja van a közösségnek, Ádám és Éva. Néha a közösség valamelyik (egyenletesen választott) tagja meghív egy új embert. Ádám köréhez tartozik valaki, ha ő maga Ádám, vagy egy Ádám köréhez tartozó tag hívta meg. Mi a valószínűsége, hogy Ádám köre 1, 2 illetve 3 főből áll akkor, amikor 4 fős a közösség?

2.7 •• Egy tehetségkutató versenyen három fordulóban válogatnak. Az első fordulóból hazaküldik a jelentkezők 90%-át, a többiek továbbjutnak a második fordulóba. A második forduló résztvevőinek 85%-ától bucsúznak el, aki ezen a rostán is túljut, mehet a harmadik fordulóba, ahol a résztvevők negyedét válogatják be a televíziós felvételre.

a) A jelentkezők hányad része jut el a televíziós felvételre?

b) Valakiről csak annyit tudunk, hogy túljutott az első fordulón. Mi a valószínűsége, hogy látni fogjuk a TV-ben?

c) Tekintsük mindazokat a jelentkezőket, akik nem jutottak el a televíziós felvételig. Hányad részüket küldték haza rendre az első, a második és a harmadik fordulóban?

2.8 Három szakács, A, B és C, egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.02, 0.03, 0.05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak, A süti a sütemények 50%-át, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. A rossz sütemények hány százalékát sütötte A?

2.9 •• A piacon a 10 tojást tartalmazó dobozok 70%-ában minden tojás ép, 25%-ában pontosan egy tojás törött, 5%-ában pontosan két tojás törött. A törött tojások helye a dobozban véletlenszerű. Veszek egy doboz tojást a piacon és bosszankodva tapasztalom, hogy az első tojás, amit kiveszek a dobozból, törött. Mi a valószínűsége, hogy a dobozban ott lapul még egy törött tojás?

2.10 • Egy első- és másodévesek által látogatott tárgyat 12 elsőéves fiú, 8 elsőéves lány, 6 másodéves fiú vett fel. Hány másodéves lány vette fel a tárgyat, ha tudjuk, hogy egy, a tárgy hallgatói közül véletlenül választott hallgató neme és évfolyama független egymástól?

2.11 Egy genetikai rendellenesség a magzatok fél százalékát érinti. Egy „megbízhatónak számító” diagnosztikai eljárás a meglévő rendellenességet biztosan detektálja, míg rendellenesség hiányában 95% valószínűséggel a helyes negatív választ adja, 5% valószínűséggel pedig a hibás pozitív választ. Ha az eljárás erdeménye pozitív, mi a valószínűsége, hogy magzatunknak tényleg megvan a rendellenessége?

2.12 Tegyük fel, hogy szabályos fej-írás dobást szeretnénk generálni, de csak egy cinkelt érme áll rendelkezésünkre, amely általunk ismeretlen p valószínűséggel mutat fejet. Tekintsük a következő eljárást.

(a) Feldobjuk az érmét.

(b) Megint feldobjuk az érmét.

(c) Ha mindkét dobás eredménye fej, vagy mindkét dobás eredménye írás, akkor újrakezdjük az első lépéssel.

(d) Ha viszont a két dobás eredménye különböző, akkor az utolsó eredmény lesz az algoritmus kimenete.

a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyforma valószínűséggel szolgáltat fejet vagy írást.

b) Lehetne-e úgy egyszerűsíteni az eljárást, hogy addig dobjuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást tekintjük?

2.13 Egy n elemű halmazból az A és B véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a 2^n lehetséges részhalmaz közül.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \subseteq B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. (*Tipp: tekintsük az eredeti halmaz minden egyes elemét.*)

b) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \cap B = \emptyset\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2.14 ••• Vizsgáljuk meg az alábbi példákban, hogy a megadott A, B és C események függetlenek-e (i) páronként; (ii) teljesen.

a) Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik.

b) Feldobunk egy szabályos dobókockát, legyen A az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem nagyobb, B az az esemény, hogy a dobás eredménye 4-nél nem kisebb, és $C = B$.

c) Egy urnában 1-től 90-ig számozott golyók vannak (mint a lottóhúzásnál) és ezekből húzunk egyet. Legyen A az az esmény, hogy a húzott golyó sorszáma páros, B az az esemény, hogy a húzott golyó sorszáma hárommal osztható, és C az az esemény, hogy a húzott golyó sorszáma öttel osztható.

2.15 Adott egy n fős társaság. Jelölje $A_{i,j}; 1 \le i < j \le n$ azt az eseményt, hogy a társaság i-dik és j-dik tagjának ugyanaz a születésnapja.

a) Páronként független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény?

b) Teljesen független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény?

2.16 Az időjárás-előrejelzés egyszerű modelljeként tegyük fel, hogy az idő vagy esős, vagy napos, és p annak a valószínűsége, hogy holnap ugyanolyan lesz mint ma, a korábbi napoktól függetlenül. Ha az idő napos január elsején, legyen P_n annak valószínűsége, hogy n nap múlva szintén napos. Mutassuk meg, hogy P_n kielégíti a

$$P_n = (2p-1)P_{n-1} + (1-p), \qquad n \ge 1; \qquad P_0 = 1$$

rekurziót. Bizonyítsuk be, hogy $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$ minden $n \ge 0$ esetén.

2.17 Móricka élete első valószínűségszámítás vizsgáján $\frac{1}{2}$ eséllyel megy át. Ha ezen megbukik, a következőre már kevesebbet tanul, ezen csak $\frac{1}{3}$ a siker valószínűsége. Minél többször bukik meg, annál kevesebbet tanul, így $k-1$ sikertelen vizsga után már csak $\frac{1}{k+1}$ az esélye, hogy a k-dik vizsgán átmegy. Ám Móricka kitartó, és a szabályzat szerint akárhányszor vizsgázhat. Mennyi a valószínűsége, hogy előbb-utóbb átmegy?

Bónusz Egy vadász 30 méter távolságban felfedez egy rókát és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebességgel próbál menekülni. A vadász 3 másodpercenként újratölt és lő a rókára, mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el nem tűnik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság négyzetével fordítottan arányos, a következő képlet szerint:

$$\mathbf{P}\{\text{a vadász eltalálja az } x \text{ méter távolságban levő rókát}\} = 675x^{-2} \qquad (x \ge 30).$$

Ha találat is éri a rókát, nem biztos, hogy fatális: az egyes találatokat (függetlenül azok számától) a róka $1/4$ valószínűséggel túléli. Mi a valószínűsége annak, hogy a róka túléli ezt a kellemetlen kalandot?

(*Tipp: Analízisből tudjuk, hogy ha* $0 < \varepsilon_n < 1$ *minden* n*-re, akkor* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n) > 0$ *pontosan akkor, ha* $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n < \infty$.)

Megjegyzés: A feladatot nyilván matematikusok találták ki matematikus diákoknak. Miért rossz modellje ez a rókavadászatnak?

2.18 Iszákos Iván a nap $2/3$ részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

2.19 Móricka és Pistike pingpongoznak. Minden játszmát a többitől függetlenül Móricka p, Pistike pedig q valószínűséggel nyer meg, ahol $p > 0$, $q > 0$ és $p + q = 1$. A játék akkor ér véget, ha valaki két egymás utáni játszmát megnyer.

a) Mi a valószínűsége, hogy Móricka nyeri az utolsó játszmát?

b) Mi a valószínűsége, hogy ugyanaz nyeri az első játszmát, mint az utolsót?

c) Ha tudjuk, hogy az utolsó játszmát Móricka nyerte, mennyi a valószínűsége, hogy az elsőt is?

2.20 Egy televíziós vetélkedőben a játékosnak három ajtó közül kell választania, és a mögötte elrejtett nyereményt kapja jutalmul. Az egyik ajtó mögött egy luxusautó található, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske. Mikor a játékos kiválasztott egyet a háromból, a játékvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, ami mögött kecske van, és felajánlja, hogy a játékos még megváltoztathatja a döntését. Érdemes-e áttérni a másik ki nem nyitott ajtóra? Mekkora valószínűséggel nyerjük meg így az autót?

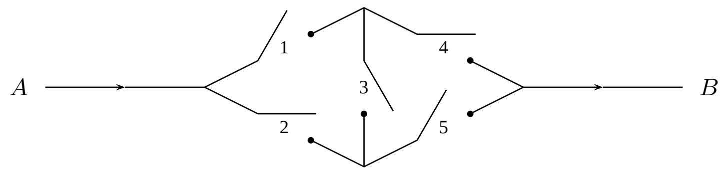
2.21 n dobozban elhelyezünk N golyót úgy, hogy mind az n^N elhelyezés egyenlően valószínű. Feltéve, hogy egy adott dobozba esik golyó, mennyi a valószínűsége annak, hogy K golyó esik bele?

2.22 Aladár, Béla, Cili és Dömötör hazudósak: átlagosan az esetek 2/3-ában hazudnak mind a négyen, egymástól függetlenül, véletlenszerűen.
Aladár azt állítja, hogy Béla tagadja, hogy Cili azt mondta, hogy Dömötör hazudott.
Mi a valószínűsége annak, hogy Dömötör igazat mondott? (Feltételezzük, hogy Aladár tudja, hogy mit mindott Béla, Béla tudja, hogy mit mindott Cili, Cili tudja, hogy mit mindott Dömötör. Továbbá, hogy Cili azt is el tudja dönteni, hogy Dömötör hazudott-e vagy sem.)

2.23 Adott egy (végtelen térfogatú) urnánk és végtelen sok, az $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ elemeivel számozott, golyónk. Az urna eredetileg üres. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az $1, 2, \dots, 10$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a $11, 12, \dots, 20$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt 2^{-n} perccel fogjuk az $10n+1, 10n+2, \dots, 10(n+1)$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. És ezt így folytatjuk éjfélig. Bizonyítandó, hogy éjfélkor az urna 1 valószínűséggel üres lesz.

3. HF:

3.1 Alább egy áramkör, ahol mindegyik kapcsoló egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel van nyitva vagy zárva.



Mi a valószínűsége, hogy A-tól B-ig áram folyhat ezen az áramkörön? (Ezért itt külön nem jár pont, de érdekes: válaszoljunk számolás nélkül is, szimmetriák segítségével! (Persze ha valaki így pontosan leírja, az is teljes értékű megoldás.))

3.2 50 százalék az esélye, hogy a királynő hordozza a hemofíliáért felelős gént. Ha hordozó, akkor mindegyik hercegnek 50-50 százalék az esélye arra, hogy hemofíliás legyen. Ha a királynő három fia nem hemofíliás, mekkora az esélye annak, hogy a királynő hordozó? Ha születik egy negyedik herceg is, mekkora az esélye annak, hogy hemofíliás lesz?

3.3 •• 4 férfit és 6 nőt rangsorolnak egy vizsgán. Tegyük fel, hogy nincs két egyforma pontszám, és mind a $10!$ elrendezés egyformán valószínű. Legyen X a legjobb nő helyezése (például $X = 1$ azt jelenti, hogy a legjobb vizsgázó egy nő). Határozzuk meg X eloszlását és várható értékét.

3.4 Öt játékos, A, B, C, D, E között véletlenszerűen szétosztjuk a számokat 1-től 5-ig, ismétlődés nélkül. Először A és B mérkőzik: akinek magasabb a száma, továbbjut. Az így továbbjutó most C-vel mérkőzik, azután a közülük továbbjutó D-vel, majd az itt nyertes E-vel. Legyen X az a szám, ahány mérkőzést A nyer. Határozzuk meg X eloszlását és várható értékét.

3.5 Szindbádnak egyszer megadatott, hogy N háremhölgy közül kiválassza a legszebbet a következő játékszabály szerint: az N háremhölgy egyenként vonult el előtte, azok valamelyikét kellett kiválasztania. A már elvonultak nem hívhatók vissza és azokról, akik még nem vonultak el, semmit sem tudott. Feltételezzük, hogy a háremhölgyeknek jól definiált szépségfokozatuk van: van egy legszebb, egy második legszebb, egy harmadik legszebb, és végül a legkevésbé szép közöttük. Továbbá azt is feltételezzük, hogy véletlen sorrendben vonulnak el Szindbád előtt: mind az $N!$ lehetséges sorrendjük egyformán valószínű.

Szindbád a következő stratégiát választotta: k hölgyet hagyott elvonulni, majd ezután kiválasztotta azt, amelyik szebb volt az összes előtte már elvonultnál (és ha ilyen hölgy nem akad, akkor Szindbád magányosan távozik). Mi a valószínűsége annak, hogy ezzel a módszerrel valóban a legszebb háremhölgyet választotta? Határozzuk meg azt a k-t, amely mellett a fenti stratégia optimális $N \to \infty$ határesetben, és a stratégiához tartozó valószínűséget is. (*Tipp: használjunk teljes valószínűség tételt aszerint, hogy a legszebb hölgy hanyadikként jön(ne) el Szindbád előtt.*)

3.6 Egy családban $n \geq 1$ gyermek αp^n valószínűséggel van, ahol $\alpha \leq (1-p)/p$.

a) A családok hányadrészében nincs gyermek?

b) Ha a gyermekek egymástól függetlenül egyforma eséllyel fiúk és lányok, akkor a családok hányadrészében lesz pontosan k fiú (és tetszőleges számú lány)?

3.7 Van két ránézésre megkülönböztethetetlen érménk, egy igazságos és egy cinkelt. A cinkelt érme $\frac{3}{4}$ valószínűséggel ad fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $\frac{1}{2}$ eséllyel az igazságosat, $\frac{1}{2}$ eséllyel a cinkeltet, és feldobom 30-szor, ebből k alkalommal esett a Fej oldalára. Ez alapján kell eldöntenem, hogy melyik érmét választottam. Milyen k értéknél húznánk meg a határt?

3.8 Az α kockának 4 piros és 2 fehér, míg a β kockának 2 piros és 4 fehér lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha fej a dobás eredménye, akkor a továbbiakban az α kockát használjuk, ha pedig írás akkor a β-t. Az így kiválasztott kockával egymásután n-szer dobunk.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobásnál az eredmény piros? ($k = 1, 2, \ldots, n$)

b) Feltéve, hogy mind az első $k-1$ kockadobás eredménye piros, mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobás eredménye is piros lesz? ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$)

3.9 •• Adott $m+1$ urna és mindegyikben m golyó; az i-dik urnában $i-1$ golyó piros, míg a fennmaradó $m-i+1$ golyó kék ($i = 1, \ldots., m+1$). Először választunk egy urnát egyenletes eloszlással, majd onnantól kezdve ebből az urnából húzunk *visszatevéssel* n alkalommal.

a) Mi a valószínűsége, hogy az n húzás mindegyike piros golyót ad?

b) Föltéve, hogy az első n húzás mind piros golyót adott, mi a valószínűsége, hogy az $(n+1)$-dik húzás is piros lesz?

Bónusz• Számoljuk ki a (b) részben kapott valószínűség határértékét, *rögzített n-re, amint $m \to \infty$.*

3.10 Egy ketyere két különböző okból romolhatott el. Az első ok ellenőrzése E_1 forintba kerülne, és ha valóban az a probléma, akkor a javítása J_1 forint. Hasonlóan, a második ok ellenőrzése E_2 forintba kerül, és ha az a probléma, akkor a javítás J_2 forint. (Ha viszont az először ellenőrzött oknál nincs probléma, akkor a másik lehetséges okot először ellenőriznünk kell, majd javítanunk.) Legyen p és $1-p$ annak valószínűségei, hogy a ketyere az első illetve a második okból romlott el. Határozzuk meg, mely $E_1,\ E_2,\ J_1,\ J_2,\ p$ értékek mellett érdemesebb várhatóan az első okkal kezdeni az ellenőrzést, és melyeknél a második okkal.

3.11 A Magyar Etikett Intézet felmérése szerint Magyarországon a fiúk két kategóriába oszthatóak: 2/3-uk udvarias, 1/3-uk udvariatlan. Az udvarias fiúk az esetek 90%-ában engedik előre a lányokat az ajtóban, az udvariatlanok viszont csak az esetek 20%-ában. Láttam, hogy Jancsi előre engedte Juliskát, Jutkát viszont nem.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jancsi az udvariatlan kategóriába tartozik?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek után Jancsi Erzsit is előre fogja engedni?

3.12 Sárkányföldön az n fejű sárkány

$$p_n = \binom{6}{n-1} \cdot 0.7^{n-1} \cdot 0.3^{7-n}$$

valószínűséggel fordul elő ($n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7$). Egy sárkány fejeinek levágása veszélyes művelet: az ember minden fejét egymástól függetlenül 90% eséllyel tudja levágni, és ha ez nem sikerül, akkor a sárkány megeszi az embert.

a) Elém kerül egy sárkány, de a nagy ködben nem látom, hogy hányfejű. Mi az esélye, hogy túlélem a találkozást?

b) Tegyük fel, hogy épp most vágtam le a hatodik fejét, de még mindig nem látom, hogy maradt-e feje. Ilyen helyzetből mekkora valószínűséggel élem túl a harcot?

c) Csata után találkozom a cimborámmal, aki szintén legyőzött egy sárkányt. Ezt figyelembe véve mi a valószínűsége, hogy hétfejűvel volt dolga?

3.13 Két dobókockát dobálunk, és mindig az összeget tekintjük. Addig dobunk, míg a két kockán lévő pöttyök összege 7 vagy 11 nem lesz.

a) Mi a valószínűsége, hogy amikor megállunk, 7 az összeg?

b) Lássuk be, hogy a dobások száma és az, hogy mennyi az összeg megálláskor, függetlenek. Azaz, tekintsük a következő eseményeket:

$$A_k = \{\text{k-szor dobunk}\},\ k = 1, 2, ... \qquad \text{illetve } B = \{\text{Megálláskor az összeg } 7\};$$

és mutassuk meg, hogy minden $k \geq 1$ esetén A_k és B független események.

3.14 Annának és Borinak van két szabályos dobókockája, egy fehér és egy sárga kocka, és a következő szabályok szerint játszanak. Először Anna dob a két kockával, és ha a két kockán ugyanaz a szám áll, ő nyer. Ha Anna dobásakor a két kockán különböző számok állnak, Bori megkapja a kockákat és most ő dob: ha sikerül legalább egy hatost dobnia, ő nyer. Ha nem, akkor az első fordulóban nincs győztes, és megismétlik az eljárást, tehát felváltva dobnak addig, amíg valamelyikük nem nyer.

a) Jelölje X, hogy összesen hány fodulóra kerül sor. Adjuk meg X valószínűség-eloszlását és várható értékét!

b) Mi a valószínűsége, hogy a teljes játék Anna győzelmével ér véget?

3.15 •• András és Béla a következőképp játszanak. Először feldobnak egy szabályos dobókockát, ha hatos, András nyer, Béla fizet neki 100 forintot, és véget ér a játék. Ha nem hatos, egy cinkelt érmét dobnak fel, ami p valószínűséggel esik a Fej oldalára. Ha Fej, Béla nyer és kap Andrástól 100 forintot. Ha Írás, megismétlik ugyanezt a kísérletet (kockadobás, majd ha nem hatos, a cinkelt érme feldobása). Ezt folytatják addig, amíg valaki nem nyer.

a) Hogyan válasszuk p-t, ha azt szeretnénk, hogy igazságos legyen a játék?

b) Jelölje X, hogy hányadik kísérlet alkalmával ér véget a játék (tehát pl. a $3I5I6$ sorozat esetén $X = 3$). Számoljuk ki X várható értékét.

3.16 Xavér és Yvett a következő játékot játszák. Egy urnában van 5 piros és 5 kék golyó. Két golyót húznak, ha a golyók azonos színűek, Xavér fizet Yvettnek 100 forintot, ha a golyók különböző színűek, Yvett fizet Xavérnak x forintot. Hogyan válasszák x-t, ha azt szeretnék, hogy igazságos legyen a játék?

3.17 •• Pisti nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kevés dereng, így minden kérdésre a többitől függetlenül 60% eséllyel ad helyes választ. A ketteshez legalább 8 helyes választ kell adnia.

a) Milyen valószínűséggel megy át Pisti a vizsgán?

b) Ha Pisti megbukik, a kövekező vizsgán ismét tanulás nélkül próbálkozik addig, amíg egyszer nem sikerül. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét.

3.18 Amerikában egy esküdtszék elítéli a vádlottat, ha a 12 esküdtből legalább 8 bűnösnek szavazza. Ha minden esküdt θ valószínűséggel dönt helyesen, akkor mi a valószínűsége a helyes döntésnek? Tegyük fel, hogy a vádlott p valószínűséggel bűnös valójában.

3.19 Kaszinóban az alábbi játékot játszuk: Minden lépésben fogadunk előre az $i = 1, 2, \ldots, 6$ számok valamelyikére, majd feldobnak 3 kockát. Ahányszor kijött a fogadott számunk, annyi petákot kapunk, ellenben fizetnünk kell 1 petákot, ha egyszer sem jött ki a fogadott szám. Fair-e a játék?

3.20 Egy n komponensű rendszer alkatrészei egymástól és a múltjuktól is függetlenül minden nap p valószínűséggel meghibásodnak, de ezeket esténként kijavítjuk. A rendszer leáll, ha legalább k alkatrész meghibásodott. Mi annak a valószínűsége, hogy először a t. napon áll le a rendszer?

Bónusz•• Pólya urna: Egy urnában kezdetben a piros és b kék golyó van. Minden egyes lépésben kihúzunk egy golyót, megnézzük, milyen színű, majd őt és egy vele megegyező színű golyót visszateszünk. (Vagyis a golyók száma az urnában minden lépésben eggyel nő). Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{2}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{3}$. Mi a valószínűsége, hogy a t. lépés után k piros golyó van az urnában ? ($k = 2 \ldots (t + 2)$)

3.21 Egy vetélkedőn egy házaspár alkot egy csapatot. Amikor a műsorvezetőtől egy eldöntendő kérdést kapnak, mindketten egymástól függetlenül p valószínűséggel adnának helyes választ. Mi a jobb stratégia:

a) egyiküket kijelölik, aki a másikra nem hallgatva válaszol a kérdésre, vagy

b) mindketten gondolkodnak a kérdésen, ha egyetértenek, ezt a választ adják, ha pedig különböző a véleményük, egy szabályos pénzérme feldobásával döntik el, hogy mit válaszoljanak.

3.22 •• Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke?

3.23 Egy gép véletlenszerűen választ 1 és 10 közötti számot, amit nekünk kell kitalálni, úgy, hogy kérdéseket teszünk fel, amire a gép igennel vagy nemmel válaszol. Számoljuk ki, várhatóan hány kérdést kell a gépnek feltennünk,

a) ha csak rákérdezhetünk, azaz azt kérdezzük, hogy „A gondolt szám i?” $i = 1, 2, \ldots, 10$, illetve

b) ha kérdéseinkkel mindig megpróbáljuk megfelezni a fennmaradó lehetséges számok körét.

3.24 **(Szentpétervári paradoxon)** Egy érmével addig dobunk, míg a fej oldalára nem esik. Ha az n-edik feldobás eredménye fej, akkor a játékos 2^n forintot nyer. Mutassuk meg, hogy a nyeremény várható értéke végtelen!

a) Megéri-e egy játékért 1 millió forintot fizetni?

b) Megéri-e játékonként 1 millió forintot fizetni, ha annyiszor játszunk, ahányszor csak akarunk, és csak az összes játék befejezése után van elszámolás?

3.25 Egy embernek n kulcsa van, amelyek közül egyetlen egy nyit egy bizonyos ajtót. Emberünk véletlenszerűen próbálkozik a kulcsokkal mindaddig, amíg rá nem talál a megfelelő kulcsra. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét, ha

a) a sikertelen kulcsokat nem zárja ki a további próbálkozások során (visszatevéses húzások),

b) a sikertelen kulcsokat kizárja a további próbálkozások során (visszatevés nélküli húzások).

4. HF:

4.1 •• Legyen $K \geq 1$ rögzített. K dobozba helyezünk el $K^2 + K$ golyót úgy, hogy az egyes dobozokba rendre $2, 4, \ldots, 2K$ golyó kerül. Válasszunk ki véletlenszerűen egy golyót; ekkor jelölje X azt, hogy összesen hány golyó van abban a dobozban, amelyben a kiválasztott golyó is található. Válasszunk véletlenszerűen egy dobozt, és jelölje Y, hogy ebben a dobozban hány golyó van.

a) Mit gondolunk, X vagy Y várható értéke nagyobb? Miért?

b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X)$-et és $\mathbf{E}(Y)$-t!

c) Számoljuk ki $\mathbf{D}^2(X)$-et és $\mathbf{D}^2(Y)$-t is!

4.2 A és B a következő játékot játssza: A gondol 1-re vagy 2-re, ezt leírja, majd B-nek ki kell találnia, melyik számra gondolt A. Ha az A által leírt szám i és B jól tippelt, akkor B i egységet kap A-tól. Ha B melléfog, akkor ő fizet A-nak $\frac{3}{4}$-t. Ha B randomizálja tippjét, azaz p valószínűséggel tippel 1-re és $1-p$ valószínűséggel 2-re, határozzuk meg nyereménye várható értékét, amennyiben

a) az A által leírt szám az 1,

b) az A által leírt szám a 2.

Milyen p érték maximalizálja B minimális várható nyereményét, és mi ez a maximin érték? (Figyeljük meg, hogy B várható nyereménye nem csak p-től függ, hanem attól is, hogy mit csinál A.)
Tekintsük most az A játékost. Tegyük fel, hogy ő is randomizálja a döntését, és q valószínűséggel gondol 1-re. Mennyi A várható vesztesége,

a) ha B 1-re tippel, ill.

b) ha B 2-re tippel?

Mely q értékkel tudja A minimalizálni a maximális várható veszteségét? Mutassuk meg, hogy A maximális várható veszteségének minimuma egyenlő B minimális várható nyereségének maximumával! Ezt az eredményt hívják minimax tételnek, ami a játékelmélet egyik alapvető eredménye, és általánosan először Neumann János fogalmazta meg. A közös értéket a játék értékének hívják (B számára).

4.3 Minden este több különböző meteorológus jósolja meg, mekkora valószínűséggel fog holnap esni az eső. Hogy megítéljük, mennyire jók a meteorológusok, a következőképpen pontozzuk őket: ha egy meteorológus p valószínűséggel jósolt esőt, akkor

$1-(1-p)^2$	pontot kap, ha valóban esik másnap,
$1-p^2$	pontot kap, ha nem esik.

Ezek után egy rögzített időszakban mérjük az egyes meteorológusok átlagpontszámát, és a legjobb előrejelző a legmagasabb pontszámot kapott meteorológus lesz. Tegyük fel, hogy az egyik meteorológus tudja ezt, és maximalizálni szeretné átlagát. Ha azt gondolja, hogy p^* valószínűséggel fog esni holnap, mekkora p értéket érdemes jelentenie?

4.4 Egymás után tízszer dobunk egy szabályos érmével. Legyen X az egymás utáni egyforma kimenetelekből álló sorozatok száma, vagyis pl. csupa fej esetén $X = 1$, a $FFIIIIFIFF$ sorozatnál pedig $X = 5$. Határozzuk meg X eloszlását.

4.5 Egy csütörtöki buliba az n meghívott mindegyike a többiektől függetlenül $1/2$ valószínűséggel jön el. Mennyi a valószínűsége, hogy a meghívottak legalább fele eljön? És, ha a hónap négy csütörtökjén szervezek bulit, mennyi annak a valószínűsége, hogy lesz legalább kettő, amin elegen leszünk (azaz a meghívottak legalább fele eljön)?

4.6 Két kockával (egyik piros, másik zöld) dobva, mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke? Dobtam a két kockával, háromszor: az egyik kockát, a pirosat mindig meglestem, hihetetlen, de mindháromszor 3-as szerepelt rajta. Mi a valószínűsége, hogy legalább egyszer nagyobb volt, mint a zöldön lévő, éppen akkor dobott szám?

4.7 n darab k-lapú „kockával" dobva mennyi a dobott számok maximumának ill. minimumának várható értéke? Vizsgáljuk a várható értékekre kapott kifejezések asszimptotikáját rögzített n mellett, amint $k \to \infty$.

4.8 ••

a) Négyszer dobunk egy hamis érmével, amin a fej valószínűsége $3/4$. Jelölje U azt a számot, ahányszor sikerül az előző dobást megismételnünk. (Így U értéke 0, 1, 2 vagy 3 lehet.) Számoljuk ki U várható értékét és szórását!

b) Tizennégyszer dobunk egy hamis érmével, amin a fej valószínűsége $6/7$. Minden Írás eredmény után fizetnünk kell 500 Ft-t, viszont minden Fej eredmény után kapunk 300 Ft-t. Számoljuk ki a nyereményünk várható értékét és szórását!

4.9 Legyen $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, számoljuk ki

a) $\mathbf{E}(2+X)^2$-t és

b) $\mathbf{D}^2(4+3X)$-t.

4.10 N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melyre $\mathbf{E}(N) < \infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i).$$

(*Tipp:* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(N \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \mathbf{P}(N = k)$. *És most szummacsere!*)

4.11 N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melyre $\mathbf{E}(N^2) < \infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{P}(N > i) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}(N)\big).$$

4.12 •• N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melyre $\mathbf{E}(N^3) < \infty$. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2\mathbf{P}(N \geq i) = \frac{\mathbf{E}(N^3)}{3} + \frac{\mathbf{E}(N^2)}{2} + \frac{\mathbf{E}(N)}{6}.$$

4.13 Egy m családból álló közösségben n_i családban van i gyerek ($\sum_{i=1}^{r} n_i = m$). Legyen X egy véletlenszerűen választott családban a gyerekek száma. Válasszunk ki véletlenszerűen a $\sum_{i=1}^{r} in_i$ gyerek közül egyet; jelölje Y azt, hogy a kiválasztott gyerek családjában hány gyerek van. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(Y) \geq \mathbf{E}(X)$.

4.14 6-szor feldobunk egy hamis pénzérmét, ami 70% valószínűséggel ad fejet. Ha tudjuk, hogy összesen 3-szor lett fej az eredmény, mi a valószínűsége, hogy

a) az első dobás fej;

b) az első 3 eredmény rendre $F,\ I,\ I$ (azaz az első fej, a második és a harmadik írás);

c) az első 3 eredmény rendre I, F, I;

d) az első 3 eredmény rendre I, I, I volt?

4.15 Egy bulvárlapban oldalanként várhatóan 0.2 nyomtatási hiba van. Mi a valószínűsége annak, hogy a következő oldalon

a) 0,

b) 2 vagy több hiba van?

Indokoljuk a választ!

4.16 Egy havonta megrendezett népszerű nyereményjátékban a legnagyobb nyeremény egy okostelefon. Ennek azonban kicsi a valószínűsége: 100 000 szelvény közül átlagosan 1 nyer telefont. Havonta 300 000 szelvényt vásárolnak.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott hónapban legalább 7 szelvény is okostelefont ér?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott évben legalább 2 hónapban lesz legalább 7 okostelefont érő szelvény?

c) Legyen a mostani hónap az 1., mi a valószínűsége annak, hogy először az i. hónapban lesz legalább 7 okostelefont érő szelvény? ($i \geq 1$)

4.17 Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 0.99 valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

4.18 •• Lovas gátversenyen a lovasok körpályán versenyeznek, és a ló a pályán elhelyezett sok akadály mindegyikét egymástól függetlenül azonos valószínűséggel veri le. Ha 2% annak valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy egy körben legalább négy akadályt lever?

4.19 London központi kerületében bekövetkező autóbalesetek száma száraz napos időben $\lambda = 10$ paraméterű Poisson-eloszlású, míg nedves esős időben $\mu = 20$ paraméterű Poisson-eloszlású. Kora novemberben Londonban $p = 0.6$ valószínűséggel van ronda esős idő (egész nap), $q = 0.4$ a valószínűsége annak, hogy verőfényes napsütés van (szintén egész nap). Azt olvastam a *Times*-ban, hogy múlt csütörtökön 17 autóbaleset történt London központjában. Mennyi a valószínűsége annak, hogy esett az eső?

4.20 Egy nagy virágágyásba sok virágmagot szórunk egyenletesen. Később a virágágyást sok kis egyenlő méretű darabra osztjuk. Azt tapasztaljuk, hogy a kis darabok 10%-ába nem került egyetlen mag sem.

a) Hány magot szórtunk ki földdarabonként átlagosan?

b) A földdarabok hány százalékában lesz egynél több mag?

4.21 •• Egy könyvet sajnos nagyon rossz minőségben nyomtattak ki: 100 olyan oldala van, amelyre pontosan egy sajtóhiba került, és 40 olyan oldala, amelyre pontosan két sajtóhiba került. Ezek alapján becsüljük meg, hány oldalas lehet a könyv.

4.22 A ”Kocogj velünk!” mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

Bónusz: Az árokugró versenyfutás szabályai a következők: A futópálya egyenes, és van rajta végtelen sok egyforma árok. Két egyforma képességű versenyző méri össze az erejét árokfutásból, akik fej fej mellett futnak. Egy versenyző egymás után át próbálja ugrani az árkokat, végül egyszer túl kicsit ugrik és beleesik valamelyikbe. Tegyük fel, hogy egy versenyző sohasem fárad el, és az árkokat egymástól függetlenül, egyenként 2^{-L} valószínűséggel tudja átugorni, ahol L az árok hossza. Ha az egyikük beleesett egy árokba, akkor véget ért a verseny.

a) Mutassuk meg, hogy a döntetlen valószínűsége pontosan akkor kisebb ε-nál, ha

$$L < \log_2 \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)$$

teljesül.

b) Ha döntetlen, akkor visszaküldjük őket a startvonalhoz és újra kezdődik a verseny. Ezt ismételjük egészen addig, amíg győztest nem hirdethetünk. Mekkora legyen L, ha a versenyzők ugrásainak számának várható értékét akarjuk minimalizálni?

5. HF:

5.1 Ketten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1, illetve p_2 valószínűséggel ér el találatot ($p_1 < p_2$). Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Aki először talál, az nyer.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ügyesebb nyer?

b) Mennyi a játék várható időtartama, ha percenként egy lövést végeznek?

c) A várható időtartam azonnal adódik, ha $p_1 = p_2$ (miért?). Ellenőrizzük le, hogy az előző kérdésre adott válaszunk ebben az esetben az, ami azonnal adódik.

5.2 Legyen X Binom$(n,\, p)$ eloszlású valószínűségi változó. Milyen p értékre lesz maximális $\mathbf{P}\{X = k\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$? Ez arra példa, hogy a statisztikában hogyan becsülik meg p értékét, ha egy Binom$(n,\, p)$ eloszlású valószínűségi változó megfigyelt értéke k. Ha feltesszük, hogy n ismert, akkor p-t azzal a $\widehat{p}$ értékkel becsüljük, amire $\mathbf{P}\{X = k\}$ maximális. Ezt a módszert hívják **maximum likelihood** becslésnek.

5.3 ••

a) Jelölje X egy szabályos kockadobás eredményét. Számoljuk ki X várható értékét és szórását.

b) András és Béla a következő játékot játszák: feldobnak hat szabályos dobókockát; a hat dobás eredményét jelölje rendre X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 és X_6. András fizet Bélanak $(X_1 + X_2 + X_3 - X_4 - X_5 - X_6)^2$ forintot, Béla pedig Andrásnak $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$ forintot. Melyiküknek kedvez a játék?

5.4 Anna és Bori egyforma erejű teniszjátékosok, minden játszmát, a többi játszmától függetlenül, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nyerhet meg bármelyikük. A tenisz mérkőzést az a játékos nyeri meg, amelyik előbb elér három játszmagyőzelmet. Jelölje X, hogy hány játszmából áll a mérkőzés. $\mathbb{E}X =$?

5.5 Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{X = i\}$ i növekedésével először nő, majd monoton csökken, a maximumát a $i = \lfloor\lambda\rfloor$-nél veszi fel. (*Tipp: tekintsük* $\mathbf{P}\{X = i\}/\mathbf{P}\{X = i-1\}$*-et.*)

5.6 Móricka, ha túrázni megy, minden lépésnél – az előzményektől függetlenül – valamekkora (kicsi) valószínűséggel hasraesik és megüti a térdét, illetve valamekkora (kicsi) valószínűséggel hanyatt esik és megüti a könyökét. Egy 10 kilométeres túrán átlagosan 3-szor szokta megütni a térdét és 2-szer a könyökét. Legfeljebb milyen hosszú túrára engedheti el az anyukája, ha azt akarja, hogy $\frac{2}{3}$ valószínűséggel térd- és könyöksérülés nélkül járja meg?

5.7 •• Egy forgamas országútszakaszon gyakran szoktak radarozni. Tapasztalatok szerint annak valószínűsége, hogy 5 percen belül lesz olyan autó, amelyik átlépi a sebességhatárt, épp ugyanannyi, mint annak, hogy nem lesz ilyen autó.

a) Mi a valószínűsége, hogy fél óra radarozás során (i) pontosan négy; (ii) legalább négy gyorshajtót mérnek?

b) Milyen hosszú időre tervezzék a rendőrök a radarozást ahhoz, hogy 99% valószínűséggel fogjanak legalább egy gyorshajtót?

5.8 Egy tábla mogyorós-mazsolás Boci csokiban átlagosan 30 mazsola van. Egy tábla csoki 15 kockából áll. Egy kocka csokiban $1/2$ valószínűséggel nincsen mogyoródarab.

(a) Milyen eloszlású lesz az egy tábla csokiban levő mogyoródarabok száma?

(b) Letörünk 2 kockát és megesszük. Mennyi a valószínűsége, hogy az elfogyasztott csokiban levő mogyoró- és mazsoladarabok együttes száma legalább 2? Adjon minél egyszerűbb formulát válaszként.

5.9 Tegyük fel, hogy egy adott időben történt események száma λ paraméterű Poisson valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ha minden eseményt p valószínűséggel számolunk, függetlenül a többi eseménytől, akkor a megszámolt események száma λp paraméterű Poisson valószínűségi változó! Emellett adjunk intuitív érvelést arra, hogy miért kell ennek így lennie.
Az előzőek alkalmazására példa: Tegyük fel, hogy egy adott terület uránlelőhelyeinek száma Poi(10) eloszlású véletlen változó. Minden lelőhelyet a többitől függetlenül $\frac{1}{50}$ valószínűséggel fedeznek fel. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy (a) pontosan 1, (b) legalább 1 és (c) legfeljebb 1 lelőhelyet fedeznek fel az adott idő alatt.

Bónusz **a)** Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\{X\text{páros}\} = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2\lambda}).$$

b) Adott egy hamis érménk, mely p valószínűséggel mutat *fej*et. Ezt az érmét 0 időpontban feldobjuk, és azt látjuk, hogy *fej*re esik. Egy λ paraméterű Poisson folyamat által megadott időpillanatokban az érmét újra és újra feldobjuk, míg egyéb időpontokban nem nyúlunk az érméhez. Mi a valószínűsége, hogy t-kor az érme fejet mutat?

c) Tegyük fel ismét, hogy az érme 0 időpontban *fej*-et mutat. A Poisson folyamat időpillanataiban ezúttal determinisztikus módon átforgatjuk (ha a fej oldalon áll, akkor az írás oldalra, ha az írás oldalon, a fej oldalra). Mi a valószínűsége, hogy t-kor az érme fejet mutat?

5.10 Egy erdő átlagos sűrűsége: 16 fa 100 m^2-enként. A fák törzse teljesen szabályos, 20 cm átmérőjű kör alapú henger. Egy puskagolyót lövünk ki célzás nélkül, az erdő szélétől 120 m-re, kifelé az erdőből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy eltalálunk egy fatörzset?
(Tekintsünk el attól az apró zavaró tényezőtől, hogy a fák alapköreinek középpontjai min. 20 cm távolságban vannak.)

5.11 •• Odüsszeusz már nagyon szeretne hazajutni Ittakába, de magára haragította Poszeidónt, aki bosszúból véletlenszerűen teleszórta a tengert örvényekkel. Az örvények kör alakúak, sűrűségük a tengeren 3 örvény 10 négyzetkilométerenként. Ha egy hajó egy örvény középpontjához 50 méternél közelebb kerül, menthetetlenül elsüllyed, ha ennél távolabb halad el, sértetlenül mehet tovább. Odüsszeusz nem tudja, hol vannak az örvények, nyílegyenes úton hajózik Ittakába. Ugyanakkor tanult valószínűségszámítást, így kiszámolta, csupán 2% esélye van, hogy sértetlenül hazajusson. Milyen messze van Odüsszeusz Ittakától?

5.12 Bulgáriában történt, hogy egymás utáni két héten kihúzták pontosan ugyanazokat a nyerőszámokat a lottón. Maradjunk hazai vizeken: a hazai, 90-ből 5-öt húzós lottón

a) mi annak a valószínűsége, hogy jövő héten ugyanazokat a számokat húzzák, mint ezen a héten?

b) kicsit enyhítsük a kérdést: mi annak a valószínűsége, hogy a lottó 50 éves történetében (minden héten egy húzást feltételezve, szünet nélkül, évi 52 héttel számolva) valaha előfordul az, hogy két egymás utáni héten ugyanazt az öt számot húzzák?

c) még egy kicsit enyhítsük a kérdést: mi annak a valószínűsége, hogy a lottó 50 éves történetében (minden héten egy húzást feltételezve, szünet nélkül, évi 52 héttel számolva) valaha előfordul az, hogy olyan 5-öst húznak ki, ami már egyszer volt?

Adjunk numerikus értéket is.

5.13 **(Stefan Banach gyufásdoboz-problémája)** Egy szórakozott matematikus vesz két doboz gyufát. Mindkét doboz n szál gyufát tartalmaz. Egyik dobozt a bal, másikat a jobb zsebébe teszi. Valahányszor pipára akar gyújtani, véletlenszerűen kiveszi az egyik dobozt és abból elhasznál egy szál gyufát. Egyik alkalommal azt veszi észre, hogy az elővett gyufásdoboza már üres. Mi annak a valószínűsége, hogy ekkor a másik dobozban pontosan k elhasználatlan gyufaszál van még?

5.14 András és Béla következő játékot játsszák. András egy szabályos dobókockával dobál. Bélának nem árulja el, hogy hányadik dobásra sikerült először hatost dobnia, de azt elárulja, hogy hányadik dobásra adódott másodszor hatos. Ezek után Béla megtippeli, hogy András hányadik dobásra kapott először hatost. Hogyan érdemes Bélának tippelnie? Ha Béla okosan tippel, milyen valószínűséggel találja el az első hatos sorszámát?

5.15 •• Anna és Bori a következőt játsszák: egy szabályos érmét dobálnak felváltva. Anna kezd. Az nyer, aki a második fejet dobja, tehát pl. Anna: Fej, Bori: Fej esetén Bori nyert.

a) Várhatóan hány érmedobás után fejeződik be a játék?

b) Feltéve, hogy Anna nyer, mi a valószínűsége, hogy az első fejet Bori dobta?

Bónusz • Mekkora valószínűséggel nyer Anna?

5.16 Dobókockával addig dobálunk, amíg 1-től 6-ig minden szám legalább egyszer elő nem fordul. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

5.17 Egy urnában 4 piros és 4 kék golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük piros és 2 kék, akkor megállunk. Különben visszarakjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 piros lesz. Mi a valószínűsége, hogy pontosan n-szer húzunk?

5.18 •• Az országban évente 150 ezer végzős gimnazistának kell pályát választania. Egy gimnazista 0.0001 valószínűséggel próbálkozik azzal, hogy űrhajósnak menjen. Az űrhajós felvételi vizsga kétfordulós, az első a jelentkező fizikai, a második a szellemi rátermettséget méri. Tegyük fel, hogy ezek független tulajdonságok. Az első vizsgán egy jelentkező 15% eséllyel megy át, a másodikon 45% eséllyel.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy jövőre legfeljebb két ember megy át az űrhajós felvételi vizsgán?

(b) Idén 12 ember ment át a felvételi első fordulóján. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább hármat felvesznek közülük?

(c) Tavaly 2 jelentkezőt vettek fel űrhajósnak. Mekkora a valószínűsége, hogy 4 ember bukott meg a felvételin?

5.19 Számítsuk ki az $(1+X)^{-1}$ valószínűségi változó várható értékét a következő esetekben:

a) ha X Binom(n, p) eloszlású;

b) ha X Poi(λ) eloszlású.

(*Tipp: integráljunk valami szépet.*)

5.20 Legyenek $p \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$ és $\lambda = pn \in (0, \infty)$ rögzítve. Továbbá: $a_k := p_{\text{Binom}(n,\, p)}(k)/p_{\text{Poi}(\lambda)}(k)$. Bizonyítsuk be, hogy amint $k = 0, 1, 2, \ldots$ növekszik

a) a_k először növekszik, majd csökken, és a maximális értékét $\lfloor \lambda + 1 \rfloor$-nál éri el.

b) a_k először kisebb, mint 1, majd 1 fölé nő, majd újból 1 alá csökken.

5.21 Egy újságkihordó 100 forintért veszi és 150 forintért adja el az újságokat. Az el nem adott lapokat nem vásárolják tőle vissza. Ha az újságokra a napi igény binomiális eloszlású véletlen változó, $n = 10$ $p = \frac{1}{3}$ értékekkel, körülbelül hány lapot vegyen, ha várható profitját szeretné maximalizálni?

5.22 Egy országban a házaspárok az első fiúig vállalnak gyereket. Mi a nemek aránya ebben az országban? Igaz-e, hogy az egy családban született gyerekek neme független egymástól?

5.23 *Hipergeometriai eloszlás tart a Binomiálishoz*

Madarat gyűrűzünk: N madárból m gyűrűzött van. Képzeljük el, hogy a madárgyűrűzést évek óta csináljuk, a madárpopuláció is nő, és átlagosan a madarak egy bizonyos hányadát vagyunk képesek befogni. Pontosabban, legyen most $N \to \infty$, $\frac{m}{N} \to p$! Bizonyítsuk be, hogy ekkor, ha (fix) n elemű mintát veszünk a populációból, és X jelöli a gyűrűzött madarak számát az n elemű mintában, akkor X eloszlása binomiálishoz tart, azaz

$$\lim_{N\to\infty, m/N\to p} \mathbf{P}(X = i) \to \mathbf{P}(Bin(n,p) = i)!$$

5.24 **a)** Tekintsünk egy 30 fős, véletelenszerűen választott emberekből álló csoportot. Mi a valószínűsége, hogy van a köztük legalább két ember, akiknek ugyanakkor van a születésnapja?

b) Tekintsünk 200 véletlenszerűen választott embert. Mi a valószínűsége, hogy van kötük legalább egy, akinek ugyanakkor van a születésnapja, mint Móricknának?

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a vizsgált emberek közül senki sem született február 29-én.

6. HF:

6.1 Tegyük fel, hogy X eloszlásfüggvénye, F a következőképpen adott:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } b < 0 \\ \dfrac{b}{4} & \text{ha } 0 \le b \le 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{b-1}{4} & \text{ha } 1 < b \le 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{ha } 2 < b \le 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < b \end{cases}$$

a) Számoljuk ki $\mathbf{P}\{X = i\}$-t, $i = 1, 2, 3$.

b) Mennyi $\mathbf{P}\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\}$?

6.2 Egy rendszer a bekapcsolástól számítva X hónapig működik. Határozzuk meg X várható értékét, és annak valószínűségét, hogy a rendszer legalább 5 hónapig működik, ha X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} Cx\mathrm{e}^{-x/2} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \le 0. \end{cases}$$

6.3 Legyen

$$f(x) = \begin{cases} C(3x - x^3) & \text{ha } 0 < x < \frac{5}{2}, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

és

$$g(x) = \begin{cases} C(3x - x^2) & \text{ha } 0 < x < \frac{5}{2}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Lehet-e f ill. g sűrűségfüggvény? Ha igen, határozzuk meg C-t és az f ill. g által meghatározott eloszlások várható értékét!

6.4 Az A és B konstansok milyen értéke mellett lehetnek eloszlásfüggvények a következő függvények?

a)

$$F(x) = \exp(-Ae^{-Bx});$$

b) •

$$F(x) = A + B \operatorname{arc\,tg} x;$$

c) •

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < x \le 0, \\ \dfrac{A+x}{1+Bx} & \text{ha } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

6.5 A C konstans milyen értéke mellett lehetnek sűrűségfüggvények a következő függvények? Ezekben az esetekben állapítsuk meg a várható értéket, valamint annak valószínűségét, hogy a megfelelő val. változó értéke $\frac{1}{2}$ és 2 közé esik.

a) •

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot \cos(2\pi x) & \text{ha } -\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

b) •

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot (-\ln(x/5)) & \text{ha } 0 < x \le 5, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot x^{-5} & \text{ha } 1 \le x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

6.6 Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Hogyha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01-nél kisebb valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

6.7 Tudjuk, hogy minden Y nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{Y > t\} \,\mathrm{d}t.$$

Mutassuk meg, hogy egy X nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty n x^{n-1} \mathbf{P}\{X > x\}\,\mathrm{d}x$$

teljesül. (*Tipp: kezdjük azzal, hogy*

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{X^n > t\}\,\mathrm{d}t,$$

majd cseréljünk változót ($t := x^n$).)

6.8 **a)** Legyen X valószínűségi változó várható értéke μ, szórásnégyzete σ^2, és a harmadik momentuma is véges. Továbbá legyen g egy háromszor differenciálható függvény. Ha tudjuk, hogy X centrált harmadik momentuma elhanyagolható, akkor mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(g(X)) \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2}\sigma^2.$$

(*Tipp: fejtsük g-t μ körül 3 tagig Taylor sorba, és hanyagoljuk el a megmaradó részt!*)

b) Legyen X egy λ várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ha λ tart végtelenhez, akkor

$$\mathbf{D}^2(\sqrt{X}) \approx 0.25.$$

Lepődjünk meg. (*Tipp: használjuk fel az előző feladatot $\mathbf{E}(\sqrt{X})$ közelítésére!*)

6.9 Legyen $F(x)$ *folytonos* eloszlásfüggvény, és $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy

$$G(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -\infty < x \le 1, \\ F(x) - F(x^{-1}), & \text{ha } 1 < x < \infty \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény. Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formulának.

6.10 Egyenletesen választunk egy pontot a $(0,1)$ intervallumból, jelölje ezt X. Mi annak a valószínűsége, hogy X, $1 - X$ és $1/2$ háromszöget alkot?

6.11 Konstruálható-e olyan folytonos $g : [0,1] \to [0,\infty)$ függvény, amelyre $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 x \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a$, $\int_0^1 x^2 \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a^2$?

Bónusz Ha egy találkozóra $s \in \mathbb{R}$ perccel korábban érkezem a megbeszéltnél, $a \cdot s$ petákot fizetek, ha s percet kések, $b \cdot s$-t fizetek. Az utazás a mai kaotikus közlekedési feltételek miatt meglehetősen véletlen ideig tart, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)$. Mikor induljak, ha a várható költséget szeretném minimalizálni? (Tipp: Írjuk fel a várható költséget integrálalakban és deriváljuk.)

6.12 •• A buszok rendre minden óra egészkor, 20-kor és 40-kor indulnak a megállóból. Ha véletlenszerűen érkezem 7:00 és 8:00 közt, mi annak a valószínűsége, hogy

a) 5 percnél kevesebbet várok?

b) 12 percnél többet várok?

c) Ugyanez a két kérdés, ha 7:08 és 7:48 közt érkezem egyenletesen.

d) És ha 7:00 és 7:30 közt érkezem egyenletesen?

6.13 A felé a vonatok 15 percenként indulnak 7:00-tól kezdve, míg B felé 15 percenként indulnak 7:05-től kezdve.

a) Ha egy utas 7:00 és 8:00 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra, majd felszáll arra a vonatra amelyik hamarabb indul, az esetek hányadrészében megy A felé, és hányadrészében B felé?

b) És ha az utas 7:10 és 8:10 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra?

c) Mi a helyzet akkor, ha B felé gyakrabban, vagyis 7:05-től kezdve 10 percenként indulnak a buszok? Számoljuk ki az előző két kérdés valószínűségét erre az esetre is!

6.14 Egy busz A és B városok között jár, mely városok 100 kilométerre vannak egymástól. Ha a busz lerobban, akkor azt egyenletes eloszlású helyen teszi a két város közötti úton; ilyenkor a legközelebbi szervízből kijönnek a szerelők és megjavítják a buszt a helyszínen. Pillanatnyilag egy buszszerviz található az A városban, egy a B városban, és egy a két város között félúton. Egy javaslat szerint ehelyett gazdaságosabb lenne a három szervizt az A várostól 25, 50, és 75 kilométerre elhelyezni. Egyetértünk-e a javaslattal? Miért? Mi lenne a szervizek legjobb elhelyezése? Milyen értelemben?

6.15 •• Egy 20 méter hosszúságú csővezetékben véletlen (a cső mentén egyenletes eloszlású) helyen van egy elzáródás. A csővezetéket egy az egyik végpontjától d méter távolságra levő ponton lehet tölteni (ahol $0 \leq d \leq 20$ rögzített paraméter). Határozzuk meg a feltölthető vezetékszakasz hosszának várható értékét.

6.16 •• Egy téglalap oldalai 1, illetve 2 egység hosszúságúak. Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlással a téglalap belsejében. Jelölje ξ e pontnak a távolságát a téglalap legközelebbi oldalától. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

6.17 Pistike randevút beszélt meg Juliskával este 6-ra. Pistike két úton is eljuthat a megbeszélt randevú helyszínére, a két út között érmedobással dönt. Az utakon való végigjutás ideje két valószínűségi változót határoz meg: A-t és B-t.

a) Az A sűrűségfüggvénye (percekben számolva):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 5 \text{ vagy } x > 20, \\ \frac{2}{75}(x-5) & \text{ha } 5 \leq x < 10, \\ \frac{1}{75}(20-x) & \text{ha } 10 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

b) A B sűrűségfüggvénye pedig:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 5, \\ \frac{1}{10}\exp\left(-\frac{x-5}{10}\right) & \text{ha } x > 5. \end{cases}$$

Pistike 6-kor indul útnak, mert elfelejtette nézni az órát. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak, ha Juliska nem egy türelmes természet, és maximum tíz percet hajlandó várni?

6.18 Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebb eloszlásfüggvénye?

6.19 Válasszunk két pontot függetlenül és egyenletesen az egységkör kerületén. Határozzuk meg a távolságuk eloszlásfüggvényét.

6.20 Válasszunk a háromdimenziós egységgömb belsejében egy pontot egyenletes eloszlással, és jelölje ξ ennek a pontnak távolságát a gömb középpontjától. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét és várható értékét.

6.21 Válasszunk az egységnégyzetben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) egy pontot. Jelölje ξ e pontnak a négyzet legközelebbi csúcsától való távolságát. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

7. HF:

7.1 Sok intelligencia teszt normális eloszlást követ, 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. Ha ezeknek a teszteknek és értékelésüknek hihetünk, akkor az emberiség hány százalékának van 95 és 110 pont között az IQ-ja? A 100 pont körüli mekkora intervallumban van az emberiség 50%-ának az IQ-ja? Egy 2500 fős településen várhatóan hány embernek lesz 125 pont fölött az IQ-ja?

7.2 Az IQ teszteknek még mindig hiszünk és tegyük fel, hogy az eredmény 100 pont várható értékű és 15 szórású normális eloszlást követ. A teszteket megírt és kiértékelt alanyokat általában 3 csoportba szokták sorolni: alacsony-, átlagos-, illetve magas intelligenciahányadosúak. A résztvevőknek rendre 20, 65 illetve 15%-a került a megfelelő csoportokba. Hol húzták meg a határokat, azaz melyek azok a pontszámok melyek megkülönböztetik az egyes csoportokat?

7.3 Tegyük fel, hogy X normális eloszlású 5 várható értékkel. Ha $\mathbf{P}\{X > 9\} = 0.2$, közelítőleg mennyi X szórásnégyzete?

7.4 • Tegyük fel, hogy a 25 éves fiatalemberek magassága centiméterben mérve normális eloszlású, $\mu = 178$ és $\sigma^2 = 144$ paraméterekkel. A 25 éves fiatalemberek hány százaléka magasabb 2 méternél? A két méteres klub tagjainak hány százaléka magasabb 2 méter 10 cm-nél?

7.5 Mutassuk meg, hogy $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (*Tipp:* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$. *Helyettesítsünk* $y = \sqrt{2x}$*-et és hasonlítsuk össze az így kapott kifejezést a normális eloszlással!*)

Bónusz: Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált „abszolút momentumait” (φ a standard normális sűrűség):

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)|y|^k \,\mathrm{d}y, \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

(*Tipp: páros* $k = 2\ell$*-re számoljuk ki és használjuk a következő kifejezést:*

$$\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2} \,\mathrm{d}y \Bigg|_{\lambda=1} .$$

Páratlan $k = 2\ell + 1$*-re hajtsuk végre a* $z = y^2$ *változócserét az* A_k*-t definiáló integrálban.*)

7.6 Legyen az X valószínűségi változó normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $t \in \mathbb{R}$-re az $\mathbf{E}(e^{tX})$ várható értéket! (Tipp: ez egy egyszerű integrálhelyettesítéssel visszavezethető a normális sűrűségfüggvény integráljára.)

7.7 Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban kapott képlet akkor is érvényes marad, ha t tetszőleges komplex szám! (Vigyázat: a normális sűrűségfüggvény integrálját csak a *valós* számegyenesen tanultuk, hogy mennyi. A bizonyításhoz kell valami komoly az analízisből.)

7.8 Legyen X nulla várható értékű és σ szórású, normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \left(\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3} \right) \quad < \quad \mathbf{P}\{X > x\} \quad < \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \frac{\sigma}{x}.$$

(*Tipp: differenciáljuk az egyenlőtlenséglánc mindhárom tagját, és hasonlítsuk össze a deriváltakat.*)

7.9 Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 100.000 pókerleosztás során a fullok száma 128 és 158 közé essen.

7.10 •• Egy gyár kétfajta érmét gyárt: egy igazságosat és egy hamisat, ami 57% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk, igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 535-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 535-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?

7.11 Egy nagyváros lakosságának *általunk ismeretlen* p hányada dohányzik. Ezt a p hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal a következő módon: megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott lakost, és megállapítjuk, hogy ezek között k állítja, hogy dohányzik. A NSZT-ből tudjuk, hogy ha n elég nagy, akkor az empirikusan megfigyelt $p' := k/n$ relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti az igazi p hányadot. Milyen nagynak kell n-et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empirikusan megfigyelt p' relatív gyakoriság legalább 0.93 valószínűséggel 0.02 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen) p hányadot? Más szóval: határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot, amelyre igaz, hogy bármely $p \in (0, 1)$-re és $n \geq n_0$-ra

$$\mathbf{P}\{|p' - p| \leq 0.02\} \geq 0.93.$$

7.12 Az előző feladat kicsit máshogy ☺

Budapest utcáin az emberek 42%-a támogatná, hogy közterületen ne lehessen dohányozni. Közelítsük azt a valószínűséget, hogy n megkérdezett ember közül legalább 40% a betiltás mellett nyilatkozik, ha

a) $n = 11$,

b) $n = 101$,

c) $n = 1001$.

d) Hány embert kellene megkérdeznünk, hogy legalább 95% eséllyel 40% felett legyenek a betiltást támogatók?

7.13 •• Az ún. Monte Carlo-integrálás lényege a következő: legyen az egyszerűség kedvéért $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvény, és az

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

integrál értékét becsüljük. Ha U és V két független $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor az (U,V) pár a $[0,1]^2$ egységnégyzet egy véletlen pontját adja. Függetlenül generálva n véletlen pontot az egységnégyzetben, jelölje X_n azon pontok számát, amelyek az f függvény grafikonja alá estek, vagyis amelyekre $V < f(U)$. Ekkor I becslését az X_n/n hányados adja. Mekkorának válasszuk n értékét, ha azt szeretnénk, hogy legfeljebb 0.02 valószínűséggel kapjunk 0.1-nél nagyobb hibát, ha a Monte Carlo-integrálás módszerét

a) az $f(x) = x^3$ függvényre alkalmazzuk?

b) egy ismeretlen $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvényre alkalmazzuk?

7.14 Van két egyforma biztosítótársaság egyenként tízezer ügyféllel. A 2007-es év elején minden ügyfél befizet a biztosítójának ötvenezer forintot, és az év folyamán minden ügyfél egymástól függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nyújt be kárigényt, amely minden esetben 150 ezer forintos. Mindkét biztosítótársaságnak van ezen felül 5 millió forint félretett pénze az előző évről. Egy biztosítótársaság csődbe megy, ha nem tudja kifizetni a beérkező kárigényeket. Érdemes-e egyesülnie a két biztosítótársaságnak? Legyen p_1 annak a valószínűsége, hogy a két biztosítótársaság közül legalább egy tönkremegy, és p_2 annak a valószínűsége, hogy az egyesült biztosítótársaság tönkremegy. Határozzuk meg p_1 és p_2 (közelítő) értékét, és vonjuk le a következtetést!

7.15 **(A Poisson eloszlás normális approximációja.)** Bizonyítsuk be, hogy $\lambda \to \infty$-re

$$\sqrt{\lambda} \cdot p_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(\lfloor \lambda + x\sqrt{\lambda} \rfloor) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) + \mathcal{O}(\lambda^{-1/2}),$$

és a hibatag egyenletesen kicsi, ha x egy korlátos halmazban marad. Következményként lássuk be, hogy

$$\sum_{\lambda+\alpha\sqrt{\lambda}<k<\lambda+\beta\sqrt{\lambda}} p_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(k) \to \int_\alpha^\beta \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

amint $\lambda \to \infty$.

7.16 •• A menzai poharak kirakásuktól számított törési ideje exponenciális eloszlást követ 24 hónap várható értékkel. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy

a) 5 kirakott pohárból legfeljebb 3 törik el egy év alatt;

b) 500 kirakott pohárból legfeljebb 210 törik el egy év alatt! (Adjuk meg a numerikus értéket is!)

7.17 A valszámium radioaktív bomló részecske átlagos élettartama 1 év. Mennyi ennek a részecskefajtának a felezési ideje?

7.18 A „Fény az éjszakában” típusú villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. A gyártó mérései szerint a körték 90 százaléka bírja legalább egy évig. Mennyi időre vállalhat a gyártó garanciát a körték működésére, ha azt akarja, hogy a vevőknek legfeljebb 1 százaléka reklamáljon?

7.19 Reggel a földalatti szerelvények követési ideje exponenciális eloszlású valószínűségi változó 2 perc várható értékkel. Az egyik szerelvényt pont lekéstem.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5 percet várnom kell a következőre?

b) Már 3 perce várok hiába. Mennyi a valószínűsége, hogy még további 5 percig várnom kell?

7.20 (*Veszélyráta.*) Egy pozitív abszolút folytonos valószínűségi változó kockázati rátafüggvényének a $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ függvényt nevezzük.

a) Mi a kockázati rátafüggvény szemléletes jelentése?

b) Lássuk be, hogy ekkor

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s\right\}!$$

c) Mi a λ paraméterű exponenenciális eloszlás rátafüggvénye?

d) És egy $[0, a]$ intervallumon egyenletes eloszlásé?

7.21 Gyakran hallani, hogy a dohányosok halálozási rátája (azaz a kockázati rátája a halál időpontjára vonatkozólag) minden életkorban kétszerakkora, mint az azonos korú nemdohányzóké. Igaza van-e annak a nemdohányzónak, aki erre azzal jön, hogy ő akkor kétszer akkora valószínűséggel fog még x évig élni, mint a dohányos osztálytársa? Ha nem, mi a két valószínűség viszonya? (*Tipp: előző feladat.*)

7.22 Egy nagyon gyors számítógépen futó program, miután elindult, minden órajel hatására (vagyis nagyon gyakran) megpróbál lefagyni – feltéve, hogy ez korábban nem sikerült neki – és valamilyen nagyon kicsi valószínűséggel le is fagy. A tapasztalat szerint ez a program az indítás után átlagosan 1 órával fagy le. Mi a lefagyásig eltelő (órában mért) idő eloszlása?

7.23 Pistike nyári estéken csillaghullást néz. Egy-egy nyári estén nagyon sok meteor éri el a Földet, ezek mindegyikének egymástól függetlenül, nagyon kis valószínűséggel sikerül Pistike szeme elé kerülni – vagyis pont akkor és ott esni le, amikor és ahol Pistike látja. Így ő fél óra alatt átlagosan hármat lát lehullani. Augusztus 19-én este 22:00-kor kezdi nézni az eget.

a) Mi a valószínűsége, hogy 22:00 és 22:25 között egyetlen hullócsillagot sem lát?

b) Mi a valószínűsége, hogy T perc alatt egyetlen hullócsillagot sem lát, ahol $T \in \mathbb{R}^+$?

c) Az X valószínűségi változó legyen az az idő (percben mérve), amennyit Pistikének az első hullócsillag megpillantására várnia kell. Számoljuk ki X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

d) Fogalmazzuk meg szépen a tanulságot!

7.24 ••• A HOMÁLY cég kétféle kompakt fénycsövet forgalmaz, az A és B típusok várható élettartama rendre 6000, illetve 10000 óra, mindkét esetben exponenciális eloszlással.

a) Egy egyetemi előadóterem két lámpájában egyszerre cserélik a fénycsöveket, tehát ha az egyik fénycső kiég, mindkettőt lecserélik. A legutóbbi csere alkalmával az egyik lámpába A, a másikba B típusú fénycső került. Mi a valószínűsége, hogy a következő cserére kevesebb, mint 3000 óra elteltével lesz szükség? És ha tudjuk, hogy a legutóbbi csere óta 2000 óra telt el, mi a valószínűsége, hogy további 3000 óráig nem lesz szükség cserére? (Az egyes fénycsövek élettartama függetlennek tekinthető.)

b) A takarékosság jegyében a doktorandusz szobába egy olcsó boltból szerzik be a fénycsövet, ahol azokat csomagolás nélkül, a rendetlenség miatt jól összekeveredve tárolják. A kupac 15%-a "selejtes", be se kapcsol, a maradék egyenlő arányban A, illetve B típusú. Vaktában választva, mi lesz a doktorandusz szobába kerülő fénycső élettartamának eloszlásfüggvénye?

c) Mi a valószínűsége, hogy a doktorandusz szobába kerülő fénycső több, mint 3000 óráig bírja? És ha ez a fénycső már kibírt 2000 órát, mi a valószínűsége, hogy még további 4000 óráig bírni fogja?

8. HF:

8.1 A következő feladatokban adott a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ill. sűrűségfüggvénye. Meg kell határozni az ξ függvényeként értelmezett $X, Y, Z, \ldots$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

(a) ξ egyenletes eloszlású a $[-1, 1]$ intervallumban; $X := \xi^2$, $Y := \xi^3$, $Z := \tan(\frac{\pi}{2}\xi)$, $U := \sin(\pi\xi)$.

(b) • ξ exponenciális eloszlású λ paraméterrel; $X := 3\xi - 2$, $Z := \sqrt[4]{\xi}$.

(c) ξ standard normális eloszlású; $X := \xi^2$, $Y := \xi^{-2}$.

(d) • ξ egyenletes eloszlású a $[-2, 4]$ intervallumban; $U := \cos(\frac{\pi}{2}\xi)$.

(e) ξ exponenciális eloszlású λ paraméterrel; $X := -3\xi + 2$, $Y := e^{\xi}$.

(f) ξ sűrűségfüggvénye $2x$ a $[0, 1]$ intervallumon, egyébként 0, $Y := \xi^{-2}$.

8.2 Legyen X egyenletes eloszlású a $[-3,\ 4]$ intervallumon, és legyen $\Psi(x) = |x - 1| + |x + 1|$. Határozzuk meg az $Y = \Psi(X)$ valószínűségi változó $G(y)$ eloszlásfüggvényét. Abszolút folytonos eloszlású-e Y? Adjuk meg a G eloszlásfüggvény Lebesgue-féle felbontását diszkrét, abszolút folytonos és folytonos de szinguláris nem csökkenő függvények összegére.

8.3 Határozzuk meg $R = A\sin(\Theta)$ eloszlását, ahol A egy rögzített konstans, és Θ egyenletes eloszlású $(-\pi/2,\ \pi/2)$-n. (*Az ilyen valószínűségi változók ballisztikánál jönnek elő: a v sebességgel α szögben kilőtt lövedék $R = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$ távolságban ér földet.*)

8.4 (a) Legyen X standard Cauchy-eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy ekkor X és $1/X$ azonos eloszlásúak. (Emlékeztető: Egy standard Cauchy eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad -\infty < x < \infty.)$$

(b) Mutassuk meg, hogy a fenti tulajdonság az

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/4 & \text{ha } |y| \le 1 \\ 1/(4y^2) & \text{ha } |y| > 1 \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű Y valószínűségi változóra is igaz, vagyis $1/Y$ eloszlása megegyezik Y eloszlásával.

8.5 **a)** Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és $c > 0$. Mutassuk meg, hogy cX szintén exponenciális eloszlású, λ/c paraméterrel.

b) Most legyen X sűrűségfüggvénye $f(x)$. Mi az $Y = aX + b$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?

c) Z eloszlása megegyezik $2Z$-jével. Mi ez a Z?

Bónusz Legyen X sűrűségfüggvénye $\frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}$ a $[0,1]$ intervallumon és 0 egyébként. Mi lesz $\frac{1}{X}$ törtrészének sűrűségfüggvénye?

8.6 ••

a) Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg $Y = \mathrm{e}^X$ sűrűségfüggvényét. (Y *eloszlását lognormálisnak nevezik.*)

b) Mutassuk meg, lehetőleg számolás nélkül, hogy ekkor CY^α eloszlása szintén lognormális $\mu' = \alpha\mu + \log C$ és $\sigma'^2 = \alpha^2\sigma^2$ paraméterekkel. (*Tipp: tudjuk, hogy $Y = \mathrm{e}^X$, ahol X normális. Írjuk fel CY^α-t e^Z alakban, találjuk meg a kapcsolatot X és Z között, és használjuk tudásunkat a normális valószínűségi változó lineáris transzformáltjairól.*)

c) Valamely homokfajta részecskéi gömb alakúak, melyeknek átmérője (milliméterben mérve) log-normális eloszlású, $\mu = -0.4$ és $\sigma := 0.3$ paraméterekkel. Az egész homokmennyiség hány *súlyszázaléka* áll 0.5 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsékből?

8.7 Legyen X folytonos eloszlású valószínűségi változó, F eloszlásfüggvénnyel. Legyen $Y = F(X)$. Mutassuk meg, hogy Y valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $(0,\ 1)$ intervallumon.

8.8 Legyen X egy valószínűségi változó, amelyre $\mathbf{P}\{X = 0\} = 0$, és $Y := X^{-1}$. Mi a feltétele annak, hogy X és Y azonos eloszlásúak legyenek?

8.9 Bizonyítsuk be, hogy ha ξ Cauchy eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, és $X := 1/\xi$, $Y := 2\xi/(1-\xi^2)$, $Z := (3\xi - \xi^3)/(1 - 3\xi^2)$, akkor X, Y és Z szintén Cauchy eloszlású. (*Tipp: Használjuk a következő trigonometriai azonosságokat: ha $\xi = \mathrm{tg}(\alpha)$, akkor $1/\xi = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, $2\xi/(1-\xi^2) = \mathrm{tg}(2\alpha)$ és $(3\xi - \xi^3)/(1 - 3\xi^2) = \mathrm{tg}(3\alpha)$.*)

8.10 Egy l hosszú ropit találomra (egyenletes eloszlással választott pontban) kettétörünk.

(a) Jelöljük X-szel az így kapott két rész hosszainak négyzetösszegét. Határozzuk meg az X valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

(b) • Jelöljük Y-nal a két részből képezett téglalap területét. Határozzuk meg az Y valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

8.11 Legyen ξ az X pont távolsága a sík $(1,\ 1)$ koordinátájú pontjától, ha

a) X-et az x-tengely $[0,\ 1]$ intervallumán véletlenszerűen választjuk;

b) X-et az x-tengely $[0,\ 2]$ intervallumán véletlenszerűen választjuk.

A két esetben határozzuk meg a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

8.12 Egy ℓ hosszú ropit két egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kiválasztott pontban eltörünk.

a) Mi az így nyert három darab közül a legrövidebb hosszának a várható értéke?

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három darabból háromszöget alkothatunk?

8.13 •• Egy téglalap oldalainak hossza legyen 1 ill a. A két szemközti 1 hosszú oldalon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk egy-egy véletlen pontot. Jelölje X e pontok távolságát. Meghatározandó X sűrűségfüggvénye.

8.14 Két szabályos kockával dobunk. Határozzuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét, ha

a) • X a dobott számok minimuma, Y a két dobott érték összege;

b) X az első kocka eredménye, Y a dobott számok maximuma;

c) rendre X, Y a dobott számok minimuma, ill. maximuma.

8.15 Legyenek X és Y független, p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. (Azaz: $\mathbf{P}\{X = i,\, Y = j\} = (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot (1-p)^{j-1} \cdot p,\ i,\, j > 0$.)

a) Sejtsük meg $\mathbf{P}\{X = i \mid X + Y = n\}$ értékét. (*Tipp: tegyük fel, hogy egy cinkelt érmét dobunk fel, egymás után sokszor. Az érme p valószínűséggel ad fejet. Ha a második fej az n-edik feldobásnál jön, mi az első fej bekövetkezése idejének eloszlása?*)

b) Igazoljuk (a)-beli eredményünket számolással. (*Tipp: ugye még emlékszünk mi független geometriai várakozási idők összegének az eloszlása?*)

8.16 Együttes eloszlásfüggvény-e a következő két függvény ($x,\, y \in \mathbb{R}$)?

$$F(x, y) = \exp(-e^{-(x+y)}), \qquad G(x, y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y}).$$

8.17 Legyen $(X,\, Y)$ az $\{(x,\, y)\ :\ x^2 + y^2 \le 1\}$ egységkörben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választott pont koordináta-párja. Határozzuk meg a peremeloszlások sűrűségfüggvényét.

8.18 •• Határozzuk meg a peremsűrűség-függvényeket! Független-e X és Y?

a) Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = \left\{ \begin{array}{cl} A \cdot (x^2 y + y^2 x) & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{array} \right\};$$

ahol az A pozitív konstans értéke meghatározandó.

b) Az (X, Y) pont eloszlása egyenletes a $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 2|x| + \dfrac{|y|}{2} \le 1 \right\}$ tartományon.

8.19 Egy férfi és egy nő találkozót beszélt meg 12:30-ra. Ha a férfi 12:15 és 12:45 között egyenletes eloszlású időben érkezik, és tőle függetlenül a nő 12:00 és 13:00 között egyenletes eloszlású időben érkezik,

a) határozzuk meg annak valószínűségét, hogy aki először érkezik, 5 percnél kevesebbet vár.

b) Mi a valószínűsége, hogy a férfi érkezik elsőnek?

8.20 n pontot függetlenül egyenletesen elosztunk egy kör kerületén, és szeretnénk meghatározni annak valószínűségét, hogy mind egy félkörbe esnek (vagyis annak valószínűségét, hogy van egy olyan, a kör középpontján átmenő egyenes, melynek az összes pont az egyik oldalán van). Jelölje $P_1,\, P_2,\, \ldots,\, P_n$ a pontokat. Legyen A az az esemény, hogy az összes pont egy félkörbe esik, és A_i az az esemény, hogy az összes pont abba a félkörbe esik, amely P_i-től indul az óramutató járásával egyező irányban, $i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

a) Fejezzük ki A-t az A_i-k segítségével.

b) Igaz-e, hogy az A_i-k kölcsönösen kizáróak?

c) Határozzuk meg $\mathbf{P}\{A\}$-t.

d) Most válaszoljuk meg a következő kérdést: ha egy *körlapon* egymástól függetlenül n pontot egyenletes eloszlással elhelyezünk, mi a valószínűsége, hogy a kör középpontja benne lesz a pontok konvex kombinációiként előálló halmazban?

8.21 Az X és Y valószínűségi változók közös sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-(x+y)}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Független-e X és Y? És ha a közös sűrűség

$$f(x,\, y) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 < y < 1,\ 0 < x < y, \\ 0, & \text{egyébként?} \end{cases}$$

8.22 Legyenek X, Y független, $[0,\, 1]$-en egyenletes valószínűségi változók. Mi a távolságuk sűrűségfüggvénye?

8.23 **Rendezett minták.** Leszórunk a $[0,\, 1]$-re egyenletesen n pontot. Mi a k. pont sűrűségfüggvénye? Rávezető kicsit egyszerűbb kérdések: Mi a maximum eloszlása? Mi a sűrűségfüggvény? És a 2. legnagyobbé? (Hogyan kapjuk meg deriválás nélkül, közvetlenül?)