Félévi időbeosztás [házi feladat beadási határidőkkel]
Figyelem! Az időbeosztás az év során változhat, pld a HF beadási határidőket az oktatók esetleg módosíthatják!
Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2022 ősz

-vel kez-dődő hét	**Előadás** H 12-14, KF81 Bálint Péter	**Fizgyak** K 12-14, H405A Ráth Balázs	**Matgyak** K 14-16, T601/2 Ráth Balázs
Szept. 5	E1	Gy1	Gy1
Szept. 12	E2	Gy2 **[1. HF]**	Gy2 **[1. HF]**
Szept. 19	E3	Gy3 **[2. HF]**	Gy3 **[2. HF]**
Szept. 26	E4	Gy4 **[3. HF]**	Gy4 **[3. HF]**
Okt. 3	E5	Gy5 **[4. HF]**	Gy5 **[4. HF]**
Okt. 10	E6 és E7 okt. 15-én, szombaton	Gy6 **[5. HF]**	Gy6 **[5. HF]**
Okt. 17	E8	Gy7	Gy7
Okt. 24	E9	Gy8 **[6. HF]**	Gy8 **[6. HF]**
Okt. 31	**Oktatási szünet**	**Oktatási szünet**	**Oktatási szünet**
Nov. 7	E10	Gy9 **[7. HF]**	Gy9 **[7. HF]**
Nov. 14	E11	Gy10 **[8. HF]**	Gy10 **[8. HF]**
Nov. 21	E12	Gy11**[9. HF]**	Gy11 **[9. HF]**
Nov. 28	E13	Gy12 **[10. HF]**	Gy12 **[10. HF]**
Dec. 5	E14	Gy13 **[11. HF]**	Gy13 **[11. HF]**

Előadás napló

09.05 Bevezető példák. Eseménytér, mértékelmélet, egyszerű állítások. Szita formula.

Ajánlott irodalom

Az elsődleges forrás, amit az elődások beosztása is viszonylag pontosan követ, a Balázs Márton – Tóth Bálint jegyzet. Más könyvjavaslatokkal együtt a kurzus honlapján megtalálható:
`http://www.math.bme.hu/~pet/valszam/Vsz2022.html`.

HF feladatsor témák

Ez csak körülbelüli iránymutató. Az előadás menetétől függően a témák esetleg vándorolhatnak, régebbi témák mindig visszatérhetnek, a fő csapásiránytól eltérő érdekességek fölbukkanhatnak.

1. Alapvető kombinatorika, szita-formula, eseménytér, egyenlő valószínűségű események
2. Feltételes val., Bayes tétel, (feltételes) függetlenség
3. Diszkrét valváltozók 1. Binomiális, geometriai, negatív binom, hipergeom.
4. Diszkrét valváltozók 2. Várható érték és szórás, Poisson eloszlás
5. Poisson folyamat, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, esetleg egyenletes eloszlás

   (ZH1 itt)
6. Egyenletes eo, normális eloszlás, binomiális és Poisson eloszlás normális approximációja, deMoivre-Laplace
7. Exponenciális eloszlás, Poisson folyamat megint, Cauchy és lognormális eloszlás, eloszlástranszformációk
8. Diszkrét és folytonos együttes eloszlások, többdimenziós eloszlástranszformációk
9. Többdimenziós eloszlástranszformációk, függetlenség és konvolúció, feltételes eloszlások, feltételes várható érték
10. Összegek várható értéke, szórása, kovarianciák, korrelációk, indikátorok összege

    (ZH2 valószínűleg itt)
11. Többdimenziós normális és korrelációi (ez talán átcsúszhat az utolsó gyakra)
12. Utolsó gyakorlaton meglátjuk, lehet csak gyakorlás, vagy kitekintés más témákra, ízlés szerint.

Házi feladatok

Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2022 ősz

Minden feladatsoron megjelöljük a *beadandó házi feladatok*at, ezek 1 (•), 2 (••), 3 (•••) vagy 4 (••••) pontot érnek, összesen 10 pont értékben. Természetesen gyakorlásképpen javasoljuk a többi feladat beadás nélküli megoldását is. Egyes heteken szerepelnek bónuszfeladatok, ezek darabonként 3 pontot érnek. Függetlenül a többi feladattól, ezek az adott héten minden esetben beadhatók, és mindig kijavítjuk őket. A házi feladatok beadási határideje az első oldalon szerepel.

Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az *igazi* csoportmunka hasznos, de ebben az esetben mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek ZH-kon és a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

1. HF:

1.1 Hányféle (esetleg értelmetlen, de különböző) szót lehet kirakni a MISSISSIPPI betűiből (mindegyik betűt pontosan egyszer felhasználva)? Hát az ABRAKADABRA szó betűiből? Mi annak a valószínűsége, hogy ha felírjuk a betűket egy-egy kártyára, akkor jól megkeverve a paklit, a két szó egymást követve értelmesen kiolvasható lesz (abrakadabramississippi vagy fordítva)?

1.2 **a)** Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú?
b) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú, ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?
c) És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?
d) Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

1.3 Egy tánciskolába 12 hölgy és 13 úriember jár. Ha 6 hölgyet és 6 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?

1.4 Egy társaság 8 nőből és 7 férfiból áll. Belőlük kell egy 4 nőből és 3 férfiból álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha

a) van két férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni,

b) van két nő, akik nem hajlandók egy bizottságban dolgozni,

c) van egy nő és egy férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni?

1.5 Egy árverésen 4 műgyűjtő vásárolt összesen 5 Dalit, 6 van Goghot, és 7 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?

1.6 **a)** Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára olymódon, hogy n emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

b) Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

azonosságot $n = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra: n emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

– válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,

– válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

c) A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3\binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

1.7 Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 26%	I és II: 6%	I és II és III: 2%
II: 18%	I és III: 9%	
III: 22%	II és III: 5%	

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

a) Határozzuk meg, hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.

b) Hányan olvasnak pontosan egy újságot?

c) Hányan olvasnak legalább kettő újságot?

d) Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

e) Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

1.8 **a)** Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

ha $\mathbf{P}\{A\} \geq 0.8$ és $\mathbf{P}\{B\} \geq 0.6$, akkor $\mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.4$.

b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

1.9 **a)** n golyót helyezünk véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres?

b) n befektetési egységet osztunk szét k részvény között. Befektetési stratégiáknak nevezzük a befektetési egységek lehetséges kiosztásait, vagyis amikor minden részvényre megadjuk, hogy abba hány egységet fektetünk be. Ha minden befektetési stratégia azonos valószínűségű, mi az esélye annak, hogy pontosan egy olyan részvény lesz, amelybe egyetlen egységet sem fektetünk be?

1.10 Egy régi vágású színházban a fogasra akasztják az érkező urak a kalapjaikat. Kifelé menet minden úr véletlenszerűen levesz egy kalapot a fogasról, és távozik. Mi annak a valószínűsége, hogy senki nem megy haza a saját kalapjában? Hogyan viselkedig ez a valószínűség aszimptotikusan amint $n \to \infty$?

1.11 •• Egy sakktábla 64 mezőjére véletlenszerűen, egyenletes valószínűséggel elhelyezünk nyolc bástyát; egy mezőre csak egy bástya kerülhet. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik bástya sem üti a másikat (azaz semelyik sor és semelyik oszlop nem tartalmaz egynél több bástyát)?

1.12 **a)** Hatszor feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az $1, 2, ..., 6$ eredmények mindegyike előfordul?

b) Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az $1, 2, ..., 6$ eredmények mindegyike (legalább egyszer) előfordul?

1.13 •• András, Béla és Csaba ultiznak: ebben a játékban a 32 lapos magyar kártyából 10 lapot osztanak mindhárom játékosnak, a fennmaradó két lap a talonba kerül. Minden leosztást egyformán valószínűnek feltételezve, mi az esélye, hogy Andráshoz a nyolc figura egyikéből sem kerül mind a négy szín? (Azaz: Andrásnak nincs se négy hetese, se négy nyolcasa... se négy ásza)?

1.14 Egy közösségben 20 család van: 5 családban egy gyerek van, 7 családban kettő, 4 családban három, 3 családban négy, 1 családban öt.

a) Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek van, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$?

b) Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$?

1.15 Egy erdőben 18 őz lakik, közülük 5 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 4-et befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?

1.16 Számoljuk ki a poker különböző értékelhető konfigurációinak valószínűségeit. Azaz 52 lapos francia kártyából ($\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K, A$) véletlenszerűen kiválasztunk ötöt. Mi annak a valószínűsége, hogy egy párunk, két párunk, drillünk, sorunk, flush-ünk, fullunk, pókerünk, színsorunk, royal flush-ünk van?

1.17 A bridzsben az 52 lapos fracia kártyából minden játékos 13–13 lapot kap. Mi a valószínűsége annak, hogy Északnak és Délnek *együttesen* k db ásza van ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)?

1.18 Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$?

1.19 Egy kisvárosban n TV-szerelő dolgozik. Egy napon k helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$?

Bónusz: Jelölje f_n azt a számot, ahány n hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje P_n ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.

a) Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$-re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ahol $f_0 = 1, f_1 = 2$. (Hány ilyen sorozat indul fejjel, és hány írással?)

b) Határozzuk meg P_n-t f_n segítségével, és ezek alapján számoljuk ki P_{10} értékét.

c) Mutassuk meg, hogy $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ és határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}}$ határértéket.

1.20 Egy urnában van 6 piros, 6 fehér, és 7 kék golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?

1.21 Anna, Bori és Cili egyforma erejű pingpongjátékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll, és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel… Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Ezt mindaddig folytatják, amíg nem nyer valamelyikük kétszer egymás után, ő lesz a körmérkőzés győztese. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?

1.22 •• Anna, Bori és Cili most érmét dobálnak, felváltva egymás után, Anna kezd, majd Bori dob, aztán Cili, majd megint Anna, és így tovább. Ezt mindaddig folytatják, míg valaki fejet nem dob.

a) Írjuk le az eseményteret!

b) Írjuk le az alábbi eseményeket az eseménytéren: $A = \{$ Anna nyer $\}$, $B = \{$ Bori nyer $\}$, $(A \bigcup B)^c$!

1.23 A lóversenyen 7 ló indul. Jelölje C azt az eseményt, hogy Csillag az első három hely valamelyikén ér be, R pedig azt, hogy Ráró a 2. helyen végez. Mennyi $C \bigcup R$ valószínűsége? Hány elemi eseményt tartalmaz $C \bigcup R$?

1.24 Kiosztunk egy pakli jól megkevert francia kártyát. Mi a valószínűsége, hogy

- **a)** a pikk ász a 14. kiosztott lap?
- **b)** az első kiosztott ász a 14.-ként kiosztott lap?
- **c)** az első négy lap különböző színű?
- **d)** az első négy lap különböző figurájú?

1.25 Van két kockánk, amelyeket azonos módon színeztünk ki: két lapot pirosra, kettőt zöldre, egyet pedig sárgára, a maradék fehér. Ha feldobjuk őket egyszerre, mi a valószínűsége, hogy ugyanolyan színűre esnek? Mi a valószínűsége annak, hogy az első két feldobásra különböző színűek lesznek, majd harmadszorra ugyanolyanok?

1.26 •• A rulettkeréken 37 mező van, ezek közül 18 fekete, 18 piros és 1 zöld. Tekintsünk 13 rulettpörgetést, mi a valószínűsége, hogy ennek során mind a három szín (piros, fekete, zöld) legalább egyszer előfordul?

1.27 •• Van 10 mentolos és 10 citromos cukorkánk, ezt a 20 cukrot véletlenszerűen elosztjuk Anna és Bea között. Ha mindkét lány 10 cukrot kap, mi a valószínűsége, hogy

- **a)** mind a 10 mentolos cukrot Anna kapja?
- **b)** mindkét lány pontosan 5 mentolos és pontosan 5 citromos cukrot kap?

1.28 Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

- **a)** nincsen teljes pár,
- **b)** pontosan egy teljes pár van,
- **c)** pontosan két teljes pár van?

1.29 6 férfit és 6 nőt véletlenszerűen két azonos létszámú csoportba osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a két csoportban 3–3 nő, illetve férfi lesz?

1.30 A bridzs játékban a négy, égtájakkal azonosított játékos mindegyikének 13 lapot osztanak ki egy 52 lapos francia kártyából. Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy egy bridzsleosztásban Északnak semmilyen értékből se legyen meg mind a négy kártyája (azaz ne legyen se négy 2-e, se négy 3-a,...., se négy K-a, se négy A-a).