

### Félévi időbeosztás [házi feladat beadási határidőkkel]

**Figyelem! Ez a file az év során változhat, pld a HF beadási határidőket a gyakvezérek esetleg módosíthatják!**

Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2019 ősz

<b>-vel kezdődő hét</b>	<b>Előadás</b> H 12-14 Bálint Péter	<b>Matgyak</b> H 10-12 Ráth Balázs	<b>Fizgyak</b> K 12-14 Lukács Gergely	<b>MatFizgyak</b> Sz 10-12 Ráth Balázs
Szept. 9	E1	Gy1	Gy1	Gy1
Szept. 16	E2	Gy2	Gy2 [1. HF]	Gy2 [1. HF]
Szept. 23	E3	Gy3 [1. HF]	Gy3 [2. HF]	Gy3 [2. HF]
Szept. 30	E4	Gy4 [2. HF]	Gy4	<b>TTK dékáni szünet</b>
Okt. 7	E5	Gy5 [3. HF]	Gy5 [3. HF]	Gy4 [3. HF]
Okt. 14	E6	Gy6 [4. HF]	Gy6 [4. HF]	Gy5 [4. HF]
Okt. 21	E7	Gy7 [5. HF]	Gy7 [5. HF]	<b>Nemzeti ünnep</b> [5. HF]: K 14-ig iroda
Okt. 28	E8	Gy8	Gy8	Gy6
Nov. 4	E9	Gy9 [6. HF]	Gy9 [6. HF]	Gy7 [6. HF]
Nov. 11	E10	Gy10 [7. HF]	<b>TDK Konferencia</b> [7. HF]: Sz 14-ig iroda	Gy8 [7. HF]
Nov. 18	E11	Gy11 [8. HF]	Gy10 [8. HF]	Gy9 [8. HF]
Nov. 25	E12	Gy12 [9. HF]	Gy11 [9. HF]	Gy10 [9. HF]
Dec. 2	E13	Gy13 [10. HF]	Gy12 [10. HF]	Gy11 [10. HF]
Dec. 9	E14	Gy14 [11. HF]	Gy13 [11. HF]	Gy12 [11. HF]

### Előadás napló

09.09 Bevezető példák. Eseménytér, mértékelmélet, egyszerű állítások. Véges eseménytér, egyenlő valószínűségű elemi események. Szita formula.

### Ajánlott irodalom

Az elsődleges forrás, amit az előadások beosztása is viszonylag pontosan követ, a Balázs Márton – Tóth Bálint jegyzet. Más könyvjavaslatokkal együtt a kurzus honlapján megtalálható:

<http://www.math.bme.hu/~pet/valszam/Vsz2019.html>.

## HF feladatsor témák

Ez csak körülbelüli iránymutató. Az előadás menetétől függően a témák esetleg vándorolhatnak, régebbi témák mindig visszatérhetnek, a fő csapásiránytól eltérő érdekességek fölbukkanhatnak.

1. Alapvető kombinatorika, szita-formula, eseménytér, egyenlő valószínűségű események
2. Feltételes val., Bayes tétel, (feltételes) függetlenség
3. Diszkrét valószínűségi eloszlások 1. Binomiális, geometriai, negatív binom, hipergeom.
4. Diszkrét valószínűségi eloszlások 2. Várható érték és szórás, Poisson eloszlás
5. Poisson folyamat, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, esetleg egyenletes eloszlás  
(ZH1 itt)
6. Egyenletes eo, normális eloszlás, binomiális és Poisson eloszlás normális approximációja, deMoivre-Laplace
7. Exponenciális eloszlás, Poisson folyamat megint, Cauchy és lognormális eloszlás, eloszlástranszformációk
8. Diszkrét és folytonos együttes eloszlások, többdimenziós eloszlástranszformációk
9. Többdimenziós eloszlástranszformációk, függetlenség és konvolúció, feltételes eloszlások, feltételes várható érték
10. Összegek várható értéke, szórása, kovarianciák, korrelációk, indikátorok összege  
(ZH2 valószínűleg itt)
11. Többdimenziós normális és korrelációi (ez talán átcsúszhat az utolsó gyakra)
12. Utolsó gyakorlaton meglátjuk, lehet csak gyakorlás, vagy kitekintés más témákra, ízlés szerint.

## Házi feladatok

Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2019 ősz

A feladatok közül minden héten a beadandó házi feladatok meg vannak jelölve, ezek 2 (••) vagy 3 pontot (•••) érnek, összesen 10 pont értékben. Természetesen gyakorlásképpen javasoljuk a többi feladat beadás nélküli megoldását is. Egyes heteken szerepelnek bónuszfeladatok, ezek darabonként 3 pontot érnek. Függetlenül a többi feladattól, ezek az adott héten minden esetben beadhatók, és mindig kijavítjuk őket. A házi feladatok beadási határideje az első oldalon szerepel.

Részpontoszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az *igazi* csoportmunka hasznos, de ebben az esetben mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek ZH-kon és a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

### 1. HF:

- 1.1 Hányféle (esetleg értelmetlen, de különböző) szót lehet kirakni a MISSISSIPPI betűiből (mindegyik betűt pontosan egyszer felhasználva)? Hát az ABRAKADABRA szó betűiből? Mi annak a valószínűsége, hogy ha felírjuk a betűket egy-egy kártyára, akkor jól megkeverve a paklit, a két szó egymást követve értelmesen kiolvasható lesz (abradabramississippi vagy fordítva)?
- 1.2
  - a) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú?
  - b) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú, ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?
  - c) És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?
  - d) Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?
- 1.3 Egy tánciskolába 12 hölgy és 13 úriember jár. Ha 6 hölgyet és 6 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?

- 1.4 Egy társaság 8 nőből és 7 férfiből áll. Belőlük kell egy 4 nőből és 3 férfiből álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha
- van két férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni,
  - van két nő, akik nem hajlandók egy bizottságban dolgozni,
  - van egy nő és egy férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni?
- 1.5 Egy árverésen 4 műgyűjtő vásárolt összesen 5 Dalit, 6 van Goghot, és 7 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?

- 1.6 a) Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára oly módon, hogy  $n$  emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

- b) Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

azonosságot  $n = 1, 2, 3, 4$  esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra:  $n$  emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

- válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,
- válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

- c) A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

- 1.7 Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 26%	I és II: 6%	I és II és III: 2%
II: 18%	I és III: 9%	
III: 22%	II és III: 5%	

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

- Határozzuk meg, hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.
  - Hányan olvasnak pontosan egy újságot?
  - Hányan olvasnak legalább kettő újságot?
  - Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?
  - Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?
- 1.8 a) Legyen  $A$  és  $B$  két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{ha } \mathbf{P}\{A\} \geq 0.8 \text{ és } \mathbf{P}\{B\} \geq 0.6, \text{ akkor } \mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.4.$$

- b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \dots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

- 1.9 a)  $n$  golyót helyezünk véletlen módon  $k$  urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres?

- b)  $n$  befektetési egységet osztunk szét  $k$  részvény között. Befektetési stratégiáknak nevezzük a befektetési egységek lehetséges kiosztásait, vagyis amikor minden részvényre megadjuk, hogy abba hány egységet fektetünk be. Ha minden befektetési stratégia azonos valószínűségű, mi az esélye annak, hogy pontosan egy olyan részvény lesz, amelybe egyetlen egységet sem fektetünk be?
- 1.10 Egy régi vágású színházban a fogasra akasztják az érkező urak a kalapjaikat. Kifelé menet minden úr véletlenszerűen levesz egy kalapot a fogasról, és távozik. Mi annak a valószínűsége, hogy senki nem megy haza a saját kalapjában? Hogyan viselkedik ez a valószínűség aszimptotikusan amint  $n \rightarrow \infty$ ?
- 1.11 •• Egy sakktábla 64 mezőjére véletlenszerűen, egyenletes valószínűséggel elhelyezünk nyolc bástyát; egy mezőre csak egy bástya kerülhet. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik bástya sem üti a másikat (azaz semelyik sor és semelyik oszlop nem tartalmaz egyenél több bástyát)?
- 1.12 •••
- a) Hatszor feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az 1, 2, ..., 6 eredmények mindegyike előfordul?
- b) Tízszor feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az 1, 2, ..., 6 eredmények mindegyike (legalább egyszer) előfordul?
- 1.13 A bridzs játékban a négy, égtájakkal azonosított játékos mindegyikének 13 lapot osztanak ki egy 52 lapos francia kártyából. Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy egy bridzseosztásban Északnak semmilyen értékből se legyen meg mind a négy kártyája (azaz ne legyen se négy 2-e, se négy 3-a, ..., se négy  $K$ -a, se négy  $A$ -a).
- 1.14 Egy közösségben 20 család van: 5 családban egy gyerek van, 7 családban kettő, 4 családban három, 3 családban négy, 1 családban öt.
- a) Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban  $i$  gyerek van,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ?
- b) Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy  $i$  gyerekes családból jött,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ?
- 1.15 Egy erdőben 18 őz lakik, közülük 5 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 4-et befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?
- 1.16 Számoljuk ki a poker különböző értékelhető konfigurációinak valószínűségeit. Azaz 52 lapos francia kártyából ( $\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K, A$ ) véletlenszerűen kiválasztunk ötöt. Mi annak a valószínűsége, hogy egy párunk, két párunk, drillünk, sorunk, flush-ünk, fullunk, pókerünk, színsorunk, royal flush-ünk van?
- 1.17 A bridzsben az 52 lapos francia kártyából minden játékos 13–13 lapot kap. Mi a valószínűsége annak, hogy Északnak és Délnek *együttesen*  $k$  db ásza van ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ )?
- 1.18 Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan  $i$  szerelő kap hívást  $i = 1, 2, 3, 4$ ?
- 1.19 Egy kisvárosban  $n$  TV-szerelő dolgozik. Egy napon  $k$  helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan  $i$  szerelő kap hívást  $i = 1, 2, \dots, n$ ?
- Bónusz: Jelölje  $f_n$  azt a számot, ahány  $n$  hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje  $P_n$  ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.
- a) Mutassuk meg, hogy  $n \geq 2$ -re  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ , ahol  $f_0 = 1, f_1 = 2$ . (Hány ilyen sorozat indul fejfel, és hány írással?)
- b) Határozzuk meg  $P_n$ -t  $f_n$  segítségével, és ezek alapján számoljuk ki  $P_{10}$  értékét.
- 1.20 •• Egy urnában van 6 piros, 6 fehér, és 7 kék golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?
- 1.21 Anna, Bori és Cili egyforma erejű pingpongjátékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll, és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel... Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Ezt mindaddig folytatják, amíg nem nyer valamelyikük kétszer egymás után, ő lesz a körmérfőzés győztese. Írjuk le a körmérfőzés eseményterét. Az  $n$  páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen  $2^{-n}$ . (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérfőzést?

- 1.22 •• Anna, Bori és Cili most érmét dobálnak, felváltva egymás után, Anna kezd, majd Bori dob, aztán Cili, majd megint Anna, és így tovább. Ezt mindaddig folytatják, míg valaki fejet nem dob.
- Írjuk le az eseményteret!
  - Írjuk le az alábbi eseményeket az eseménytéren:  $A = \{ \text{Anna nyer} \}$ ,  $B = \{ \text{Bori nyer} \}$ ,  $(A \cup B)^c$  !
- 1.23 A lóversenyen 7 ló indul. Jelölje  $C$  azt az eseményt, hogy Csillag az első három hely valamelyikén ér be,  $R$  pedig azt, hogy Ráró a 2. helyen végez. Mennyi  $C \cup R$  valószínűsége? Hány elemi eseményt tartalmaz  $C \cup R$ ?
- 1.24 Kiosztunk egy pakli jól megkevert francia kártyát. Mi a valószínűsége, hogy
- a pikk ász a 14. kiosztott lap?
  - az első kiosztott ász a 14.-ként kiosztott lap?
  - az első négy lap különböző színű?
  - az első négy lap különböző figurájú?
- 1.25 Van két kockánk, amelyeket azonos módon színeztünk ki: két lapot pirosra, kettőt zöldre, egyet pedig sárgára, a maradék fehér. Ha feldobjuk őket egyszerre, mi a valószínűsége, hogy ugyanolyan színűre esnek? Mi a valószínűsége annak, hogy az első két feldobásra különböző színűek lesznek, majd harmadszorra ugyanolyanok?
- 1.26 • 6 férfit és 6 nőt véletlenszerűen két azonos létszámú csoportba osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a két csoportban 3–3 nő, illetve férfi lesz?
- 1.27 Egy szekrényben  $n$  pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk  $2r$  cipőt ( $2r \leq n$ ). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között
- nincsen teljes pár,
  - pontosan egy teljes pár van,
  - pontosan két teljes pár van?