A 8.12(a) feladat megoldása

Jelölje X és Y a két töréspont helyét. Szimmetriaokokból az $X > Y$ esetre szorítkozunk. Ekkor (X, Y) eloszlása egyenletes a $0 < y < x < \ell$ egyenlőtlenségekkel meghatározott tartományon, ami egy $\ell^2/2$ területű háromszög, jelöljük ezt a háromszöget H-val.

A három darab hossza Y, $X - Y$ és $1 - X$. Jelölje ezek közül a legrövidebbet ξ. ξ nemnegatív valószínűségi változó, használni fogjuk az

$$\mathbb{E}\xi = \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi > z)dz$$

képletet. Tehát a $\mathbb{P}(\xi > z)$ valószínűséget kell maghatározni.

A három darab közül az egyik hossza biztosan nem haladja meg $\ell/3$-t, így $z \geq \ell/3$ esetén $\mathbb{P}(\xi > z) = 0$.

Ha $z < \ell/3$, $\xi > z$ akkor és csak akkor teljesül, ha *mindhárom darab* hosszabb z-nél. Tehát a $\{\xi > z\}$ eseménynek a H háromszög azon pontjai felelnek meg, melyekre teljesülnek az $y > z$, $x - y > z$ és az $1 - x > z$ feltételek. Ezek a feltételek együttesen egy H-hoz hasonló H_z háromszöget határoznak meg, melynek területe $(\ell - 3z)^2/2$. A háromszögek területeinek aránya adja a valószínűséget:

$$\mathbb{P}(\xi > z) = \frac{t(H_z)}{t(H)} = \frac{(\ell - 3z)^2}{\ell^2}$$

amit 0-tól $\ell/3$-ig integrálva

$$\mathbb{E}\xi = \ell/9.$$