A 11.11(b) és 11.11(c) feladatok megoldása

(b) Legyen $N_3 = [-3,3]^2$ és $N_2 = [-2,2]^2$, két négyzet alakú tartomány. Annak valószínűségét keressük, hogy az (X,Y) véletlen pont beleesik az $N_3 \setminus N_2$ tartományba, vagyis a két négyzet különbségébe. Fontos megjegyzés: N_3 és N_2 is téglalap alakú tartományok, de $N_3 \setminus N_2$ nem téglalap alakú! Mivel $X \sim \mathcal{N}(0,4)$; $Y \sim \mathcal{N}(0,4)$ és függetlenek, standardizálással

$$\mathbb{P}((X,Y) \in N_3) = \mathbb{P}(|X| \leq 3) \cdot \mathbb{P}(|Y| \leq 3) = (2\Phi(3/2) - 1)^2 .$$

Hasonlóan $\mathbb{P}((X,Y) \in N_2) = (2\Phi(1) - 1)^2$, így a feladat kérdésére a válasz

$$\mathbb{P}((X,Y) \in N_3 \setminus N_2) = (2\Phi(3/2) - 1)^2 - (2\Phi(1) - 1)^2 .$$

(c) Bevezetve az $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$, $V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ változókat, a kérdéses tartomány:

$$(U,V) \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]^2 \setminus \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]^2 = N_{\frac{3}{\sqrt{2}}} \setminus N_{\sqrt{2}}$$

ami ismét két négyzet különbsége. Mivel $U \sim \mathcal{N}(0,4)$; $V \sim \mathcal{N}(0,4)$ és függetlenek, a kérdéses valószínűség a (b) részhez hasonlóan számolható:

$$\mathbb{P}\left((X,Y) \in N_{\frac{3}{\sqrt{2}}} \setminus N_{\sqrt{2}}\right) = \left(2\Phi\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) - 1\right)^2 - \left(2\Phi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1\right)^2 .$$