9. HF:

9.1 **a)** Legyenek $X \sim \mathrm{E}(0,\,1)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek. Határozzuk meg $X+Y$ eloszlását.

b) Legyenek $X \sim \mathrm{E}(0,\,1)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek. Határozzuk meg X/Y eloszlását.

c) Legyenek $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ függetlenek. Határozzuk meg X/Y eloszlását, és a $\mathbf{P}\{X < Y\}$ valószínűséget.

d) Legyen X és Y két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy az $U := X + Y$ és $V := X/(X + Y)$ valószínűségi változók függetlenek.

9.2 Mutassuk meg *számolással*, hogy ha X_i, $i = 1,\,\dots,\,n$ független azonos eloszlású geometriai valószínűségi változók, akkor $X_1 + \cdots + X_n$ negatív binomiális eloszlású. Használjunk indukciót. (A valószínűségszámítási érvelést már láttuk előadáson.)

9.3 •• X úr vonattal és távolsági autóbusszal utazik a munkahelyére. *Menetrend szerint* a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. Ám a vonat valódi érkezési ideje *normális eloszlású* valószínűségi változó melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 3 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétől független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 4 perc.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy X úr a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal késse le a buszcsatlakozást?

b) X úr hazafelé a menetrend szerint 17:40-kor érkező buszról leszállva szeretné elérni a menetrend szerint 17:49-kor induló vonatot. A járművek érkezési, illetve indulási idejének szórása ismét 4, illetve 3 perc, és az átszállás visszafelé is két percet igényel. Egy évben 220 munkanappal számolva, mi a valószínűsége, hogy X úr hazafelé több alkalommal kési le a csatlakozást, mint munkába menet?

9.4 Egy palack tej mennyiségének várható értéke 1 liter, szórása 4 centiliter. Egy négytagú családban minden reggel kibontanak egy palack tejet. Először a kisebbik gyerek tölt magának egy kis pohárral, majd a nagyobb gyerek és az anyuka egy-egy nagy pohárral, a maradékot az apuka ihatja meg. A kis pohárba várhatóan 2 deciliter, a nagyobb poharakba 3-3 deciliter tej kerül, a tej mennyiségének szórása 1 centiliter a kis pohár és 2 centiliter a nagy pohár esetén. Az egyes folyadékmennyiségek függetlennek és normális eloszlásúnak tekinthetők.

a) Mi a valószínűsége, hogy az apukának kevesebb, mint másfél deciliter tej marad?

b) Mi a valószínűsége, hogy 2015-ben legalább 70 reggel kell az apukának másfél deciliternél kevesebb tejjel beérnie?

c) Esténként a közeli éjjel-nappali boltban vásárolják a tejet, az ott kapható palackban a mennyiség várható értéke 1 liter, szórása 5 centiliter. Vacsoránál a tejet a reggelihez hasonló eljárással osztják el egymás között a család tagjai. Mi a valószínűsége, hogy 400 egymást követő napon több olyan reggeli lesz, mint ahány vacsora, amikor az apukának másfél deciliternél kevesebb tejjel kell beérnie?

9.5 A kóbor kutyák átlagos testsúlya 40 kg, a testsúlyuk szórása pedig 20 kg. A sintérek által a kutyák elfogására használt háló elszakad, ha a kutya 60 kilósnál nehezebb, a 20 kilósnál kisebb kutyák pedig ki tudnak bújni belőle. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kutya testsúlya az átlagtól nem tér el 20 kg-mal többel, és így biztonsággal el lehet kapni a hálóval, ha

a) a testsúly $\mathcal{N}(40,\,400)$ normális eloszlású;

b) a testsúly lognormális eloszlású, melynek 40 kg a várható értéke és 20 kg a szórása.

A két modell közül melyik valószerűbb?

9.6 Legyenek X, Y és Z független, azonos $\mathrm{Geom}(p)$ eloszlású valószínűségi változók.

a) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$\mathbf{P}\{X = Y\}, \qquad \mathbf{P}\{X \geq 2Y\}, \qquad \mathbf{P}\{X + Y \leq Z\}.$$

b) Legyen $U := \min\{X, Y\}$ és $V := X - Y$. Bizonyítsuk be, hogy U és V függetlenek.

9.7 **A függetlenség szimmetriája.** Legyenek $X_1,\,X_2,\,\dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók az F folytonos eloszlásból. (Próbaként, lehet egyenletes.) Jelölje A_n azt az eseményt, hogy az X_n rekord, azaz nagyobb, mint az összes addigi. Mennyi $\mathbf{P}\{A_n\}$? Független-e A_{n+1} A_n-től? Számítsuk ki a $\mathbf{P}\{A_n \mid A_{n+1}\}$ és $\mathbf{P}\{A_{n+1} \mid A_n\}$ feltételes valószínűségeket.

9.8 A patikába egy óra alatt betérő emberek száma Poisson eloszlású $\lambda = 10$ paraméterrel. Számoljuk ki annak feltételes valószínűségét, hogy legfeljebb 3 férfi tért be, feltéve, hogy 10 nő tért be a patikába abban az órában. Milyen feltevésekkel éltünk?

9.9 Legyenek $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, $Y \sim \mathrm{Poi}(\mu)$ eloszlású független valószínűségi változók. Mi lesz X feltételes eloszlása $X + Y$ ismeretében? Számoljuk ki, majd ismerjük fel az eloszlást és vonjuk le a tapasztalatot a Poisson folyamatra gondolva.

9.10 Legyenek $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5$ független azonos eloszlású, folytonos valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük legyen F, sűrűségfüggvényük legyen f, továbbá legyen

$$I = \mathbf{P}\{X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5\}.$$

a) Mutassuk meg, hogy I nem függ F-től. (*Tipp: Írjuk át I-t ötös integrállá, és alkalmazzuk az $u_i = F(x_i)$, $i = 1, \dots, 5$ változócserét.*)

b) Számoljuk ki I értékét!

c) Adjunk szemléletes magyarázatot az előző pontban kapott eredményre!

9.11 Számoljuk ki a következő együttes eloszlásokra X feltételes sűrűségfüggvényét az $Y = y_0$ feltétel, valamint Y feltételes sűrűségfüggvényét az $X = x_0$ feltétel mellett:

a) Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y) & \text{ha } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

b) (X, Y) együttes eloszlása egyenletes az $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ körlapon.

9.12 ••

a) Két dobókockával dobunk, legyen X a dobott számok összege, Y a dobott számok különbsége. Számoljuk ki Y feltételes súlyfüggvényét, az $X = i,\ i = 2,\ 3,\ \ldots,\ 12$ feltétel mellett. Független egymástól X és Y? Miért?

b) X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = c\left(x^4 - y^4\right) \mathrm{e}^{-2x} \qquad 0 \leq x < \infty,\ |y| \leq x.$$

Mi Y feltételes eloszlása, $X = x$ feltétel mellett?

9.13 Legyenek X, Y és Z független valószínűségi változók. Legyen X ill. Y eloszlásfüggvénye $F(x)$, ill. $G(x)$, és legyen $\mathbf{P}\{Z = 1\} = p = 1 - \mathbf{P}\{Z = 0\}$. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit:

$$T := ZX + (1 - Z)Y, \qquad U := ZX + (1 - Z)\max\{X,\, Y\}, \qquad V := ZX + (1 - Z)\min\{X,\, Y\}.$$

9.14 •• Pistike egy nagy doboz rossz minőségű villanykörtét vásárolt, amiknek az élettartama független exponenciális eloszlású mindössze 10 perc várható értékkel. Este 10-kor leül valószínűségszámítást tanulni, becsavarja az asztali lámpájába az első körtét, és felkapcsolja. Ezután amikor egy körte kiég, rögtön kicseréli, és a következő mellett tanul tovább. Jelölje $\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots$ az egyes villanykörték élettartamát.

a) Jelölje T_2 azt az időpontot (este 10-től számítva, percben), amikor a második körte kiég, vagyis $T_2 = \tau_1 + \tau_2$. Mi T_2 sűrűségfüggvénye? Számoljuk ki közvetlenül.

b) Milyen lesz T_1 feltételes eloszlása a $T_2 = t$ feltétel mellett?

c) "Kitekintő": Mi annak a valószínűsége egy POI(1/10) folyamatban, hogy még nem érkezett meg t-kor a második pont? És hogy már megérkezett? Deriváljuk és hasonlítsuk össze az első pontbeli eredménnyel.

d) Jelölje T_n azt az időpontot (este 10-től számítva, percben), amikor az n-edik körte kiég, vagyis $T_n = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$. Mi T_n sűrűségfüggvénye?

e) Minden n-re írjuk fel annak valószínűségét, hogy n darab körtével nem tudja kihúzni fél óráig – vagyis hogy $T_n < 30$. (A kapott közepesen csúnya integrál kiszámolása nélkül is továbbléphetünk.)

f) Jelölje X a Pistike által az első 30 perc alatt elhasznált körték számát. Mi X eloszlása?

9.15 Egymástól függetlenül N ember érkezik egy üzleti vacsorára. Amikor megérkezik, minden ember körülnéz, hogy van-e a már megjelentek között barátja, majd vagy odaül az egyik barátjának az asztalához, vagy egy üres asztalhoz ül, ha nem érkezett meg még egy barátja sem. Ha bármely két ember mindentől függetlenül p valószínűséggel barátja egymásnak, számoljuk ki az elfoglalt asztalok várható számát! (*Tipp: legyen X_i annak az indikátora, hogy az i-edik megérkező üres asztalhoz ül. (Azaz $X_i = 1$, ha üres asztalhoz ül, és $X_i = 0$, ha nem.)*)

9.16 •• Adott egy 100 emberből álló csoport.

a) Mennyi azon napok várható száma, amikor legalább 3 embernek van közülük születésnapja?

b) Várhatóan hány olyan nap van egy évben, amikor közülük valakinek születésnapja van?

Bónusz (hasonló, mint az előző, csak picit máshogy) Egy urnában van n golyónk, ebből húzunk a_n darabot ismétléssel.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy az i-edik golyót legalább kétszer húzom ki?

b) Milyen a_n értékre lesz a legalább kétszer húzott golyók számának várható értéke Cn^α, $\alpha \in \mathbb{R}$ nagyságrendű? Spec $\alpha = 0$-ra mekkora az a_n?

c) Mik a szóba jöhető α kitevők?

9.17 Véletlenszerűen sorban áll n férfi és n nő.

a) Mennyi azon férfiak várható száma, akik mellett (azaz előtt vagy mögött) nő áll a sorban?

b) Mennyi lenne a válasz, ha nem sorban állnának, hanem egy kerek asztal köré ülnének le?

9.18 •• 10 házaspár ül le véletlen elhelyezéssel egy kerekasztalhoz. Számítsuk ki

a) a várhatóértékét,

b) a szórásnégyzetét

annak, hogy hány férj ült a felesége mellé.

9.19 Egy hibátlan kockával dobunk tízszer. Jelölje X azt a számot, ahányszor páros dobást páratlan követ. Mennyi X várható értéke és szórása?

9.20 Dobókockával addig dobálunk, amíg 1-től 6-ig minden szám legalább egyszer elő nem fordul. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?