7. HF:

7.1 •• Sok intelligencia teszt normális eloszlást követ, 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. Ha ezeknek a teszteknek és értékelésüknek hihetünk, akkor az emberiség hány százalékának van 95 és 110 pont között az IQ-ja? A 100 pont körüli mekkora intervallumban van az emberiség 50%-ának az IQ-ja? Egy 2500 fős településen várhatóan hány embernek lesz 125 pont fölött az IQ-ja?

7.2 Az IQ teszteknek még mindig hiszünk és tegyük fel, hogy az eredmény 100 pont várható értékű és 15 szórású normális eloszlást követ. A teszteket megírt és kiértékelt alanyokat általában 3 csoportba szokták sorolni: alacsony-, átlagos-, illetve magas intelligenciahányadosúak. A résztvevőknek rendre 20, 65 illetve 15%-a került a megfelelő csoportokba. Hol húzták meg a határokat, azaz melyek azok a pontszámok melyek megkülönböztetik az egyes csoportokat?

7.3 Tegyük fel, hogy X normális eloszlású 5 várható értékkel. Ha $\mathbf{P}\{X > 9\} = 0.2$, közelítőleg mennyi X szórásnégyzete?

7.4 Tegyük fel, hogy a 25 éves fiatalemberek magassága centiméterben mérve normális eloszlású, $\mu = 180$ és $\sigma^2 = 169$ paraméterekkel. A 25 éves fiatalemberek hány százaléka magasabb 2 méternél? A két méteres klub tagjainak hány százaléka magasabb 2 méter 10 cm-nél?

7.5 Mutassuk meg, hogy $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (*Tipp:* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{-\frac{1}{2}}\, dx$. *Helyettesítsünk* $y = \sqrt{2x}$*-et és hasonlítsuk össze az így kapott kifejezést a normális eloszlással!*)

Bónusz: Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált „abszolút momentumait” (φ a standard normális sűrűség):

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)|y|^k \, \mathrm{d}y, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(*Tipp: páros* $k = 2\ell$*-re számoljuk ki és használjuk a következő kifejezést:*

$$\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2} \, \mathrm{d}y \Bigg|_{\lambda=1}.$$

Páratlan $k = 2\ell + 1$*-re hajtsuk végre a* $z = y^2$ *változócserét az* A_k*-t definiáló integrálban.*)

7.6 Legyen az X valószínűségi változó normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $t \in \mathbb{R}$-re az $\mathbf{E}(e^{tX})$ várható értéket! (Tipp: ez egy egyszerű integrálhelyettesítéssel visszavezethető a normális sűrűségfüggvény integráljára.)

7.7 Bizonyítsuk be, hogy az előző feladatban kapott képlet akkor is érvényes marad, ha t tetszőleges komplex szám! (Vigyázat: a normális sűrűségfüggvény integrálját csak a *valós* számegyenesen tanultuk, hogy mennyi. A bizonyításhoz kell valami komoly az analízisből.)

7.8 Legyen X nulla várható értékű és σ szórású, normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \left(\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3} \right) \quad < \quad \mathbf{P}\{X > x\} \quad < \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \frac{\sigma}{x}.$$

(*Tipp: differenciáljuk az egyenlőtlenséglánc mindhárom tagját, és hasonlítsuk össze a deriváltakat.*)

7.9 Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 100.000 pókerleosztás során a fullok száma 128 és 158 közé essen.

7.10 •• Egy gyár kétfajta érmét gyárt: egy igazságosat és egy hamisat, ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk, igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?

7.11 Egy nagyváros lakosságának *általunk ismeretlen* p hányada dohányzik. Ezt a p hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal a következő módon: megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott lakost, és megállapítjuk, hogy ezek között k állítja, hogy dohányzik. A NSZT-ből tudjuk, hogy ha n elég nagy, akkor az empirikusan megfigyelt $p' := k/n$ relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti az igazi p hányadot. Milyen nagynak kell n-et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empirikusan megfigyelt p' relatív gyakoriság legalább 0.93 valószínűséggel 0.02 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen) p hányadot? Más szóval: határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot, amelyre igaz, hogy bármely $p \in (0, 1)$-re és $n \geq n_0$-ra

$$\mathbf{P}\{|p' - p| \leq 0.02\} \geq 0.93.$$

7.12 Az előző feladat kicsit máshogy ☺

Budapest utcáin az emberek 42%-a támogatná, hogy közterületen ne lehessen dohányozni. Közelítsük azt a valószínűséget, hogy n megkérdezett ember közül legalább 40% a betiltás mellett nyilatkozik, ha

a) $n = 11$,

b) $n = 101$,

c) $n = 1001$.

d) Hány embert kellene megkérdeznünk, hogy legalább 95% eséllyel 40% felett legyenek a betiltást támogatók?

7.13 •• Az ún. Monte Carlo-integrálás lényege a következő: legyen az egyszerűség kedvéért $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvény, és az

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

integrál értékét becsüljük. Ha U és V két független $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor az (U,V) pár a $[0,1]^2$ egységnégyzet egy véletlen pontját adja. Függetlenül generálva n véletlen pontot az egységnégyzetben, jelölje X_n azon pontok számát, amelyek az f függvény grafikonja alá estek, vagyis amelyekre $V < f(U)$. Ekkor I becslését az X_n/n hányados adja. Mekkorának válasszuk n értékét, ha azt szeretnénk, hogy legfeljebb 0.02 valószínűséggel kapjunk 0.1-nél nagyobb hibát, ha a Monte Carlo-integrálás módszerét

a) az $f(x) = x^2$ függvényre alkalmazzuk?

b) egy ismeretlen $f : [0,1] \to [0,1]$ folytonos függvényre alkalmazzuk?

7.14 Van két egyforma biztosítótársaság egyenként tízezer ügyféllel. A 2007-es év elején minden ügyfél befizet a biztosítójának ötvenezer forintot, és az év folyamán minden ügyfél egymástól függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nyújt be kárigényt, amely minden esetben 150 ezer forintos. Mindkét biztosítótársaságnak van ezen felül 5 millió forint félretett pénze az előző évről. Egy biztosítótársaság csődbe megy, ha nem tudja kifizetni a beérkező kárigényeket. Érdemes-e egyesülnie a két biztosítótársaságnak? Legyen p_1 annak a valószínűsége, hogy a két biztosítótársaság közül legalább egy tönkremegy, és p_2 annak a valószínűsége, hogy az egyesült biztosítótársaság tönkremegy. Határozzuk meg p_1 és p_2 (közelítő) értékét, és vonjuk le a következtetést!

7.15 **(A Poisson eloszlás normális approximációja.)** Bizonyítsuk be, hogy $\lambda \to \infty$-re

$$\sqrt{\lambda} \cdot p_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(\lfloor \lambda + x\sqrt{\lambda} \rfloor) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) + \mathcal{O}(\lambda^{-1/2}),$$

és a hibatag egyenletesen kicsi, ha x egy korlátos halmazban marad. Következményként lássuk be, hogy

$$\sum_{\lambda+\alpha\sqrt{\lambda}<k<\lambda+\beta\sqrt{\lambda}} p_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(k) \to \int_\alpha^\beta \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

amint $\lambda \to \infty$.

7.16 A menzai poharak kirakásuktól számított törési ideje exponenciális eloszlást követ 6 hónap várható értékkel. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy

a) 5 kirakott pohárból legfeljebb 3 törik el egy éve alatt;

b) 500 kirakott pohárból legfeljebb 300 törik el egy éve alatt! (Adjuk meg a numerikus értéket is!)

7.17 A valszámium radioaktív bomló részecske átlagos élettartama 1 év. Mennyi ennek a részecskefajtának a felezési ideje?

7.18 •• A „Fény az éjszakában” típusú villanykörte élettartama exponenciális eloszlású. A gyártó mérései szerint a körték 90 százaléka bírja legalább egy évig. Mennyi időre vállalhat a gyártó garanciát a körték működésére, ha azt akarja, hogy a vevőknek legfeljebb 1 százaléka reklamáljon?

7.19 Reggel a földalatti szerelvények követési ideje exponenciális eloszlású valószínűségi változó 2 perc várható értékkel. Az egyik szerelvényt pont lekéstem.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 5 percet várnom kell a következőre?

b) Már 3 perce várok hiába. Mennyi a valószínűsége, hogy még további 5 percig várnom kell?

7.20 (*Veszélyráta.*) Egy pozitív abszolút folytonos valószínűségi változó kockázati rátafüggvényének a $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ függvényt nevezzük.

a) Mi a kockázati rátafüggvény szemléletes jelentése?

b) Lássuk be, hogy ekkor

$$F(t) = 1 - \exp\left\{ -\int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s \right\}!$$

c) Mi a λ paraméterű exponenenciális eloszlás rátafüggvénye?

d) És egy $[0,a]$ intervallumon egyenletes eloszlásé?

7.21 Gyakran hallani, hogy a dohányosok halálozási rátája (azaz a kockázati rátája a halál időpontjára vonatkozólag) minden életkorban kétszerakkora, mint az azonos korú nemdohányzóké. Igaza van-e annak a nemdohányzónak, aki erre azzal jön, hogy ő akkor kétszer akkora valószínűséggel fog még x évig élni, mint a dohányos osztálytársa? Ha nem, mi a két valószínűség viszonya? (*Tipp: előző feladat.*)

7.22 Egy nagyon gyors számítógépen futó program, miután elindult, minden órajel hatására (vagyis nagyon gyakran) megpróbál lefagyni – feltéve, hogy ez korábban nem sikerült neki – és valamilyen nagyon kicsi valószínűséggel le is fagy. A tapasztalat szerint ez a program az indítás után átlagosan 1 órával fagy le. Mi a lefagyásig eltelő (órában mért) idő eloszlása?

7.23 Pistike nyári estéken csillaghullást néz. Egy-egy nyári estén nagyon sok meteor éri el a Földet, ezek mindegyikének egymástól függetlenül, nagyon kis valószínűséggel sikerül Pistike szeme elé kerülni – vagyis pont akkor és ott esni le, amikor és ahol Pistike látja. Így ő fél óra alatt átlagosan hármat lát lehullani. Augusztus 19-én este 22:00-kor kezdi nézni az eget.

a) Mi a valószínűsége, hogy 22:00 és 22:25 között egyetlen hullócsillagot sem lát?

b) Mi a valószínűsége, hogy T perc alatt egyetlen hullócsillagot sem lát, ahol $T \in \mathbb{R}^+$?

c) Az X valószínűségi változó legyen az az idő (percben mérve), amennyit Pistikének az első hullócsillag megpillantására várnia kell. Számoljuk ki X eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét!

d) Fogalmazzuk meg szépen a tanulságot!

7.24 •• A HOMÁLY cég kétféle kompakt fénycsövet forgalmaz, az A és B típusok várható élettartama rendre 4000, illetve 8000 óra, mindkét esetben exponenciális eloszlással.

a) Egy egyetemi előadóterem két lámpájában egyszerre cserélik a fénycsöveket, tehát ha az egyik fénycső kiég, mindkettőt lecserélik. A legutóbbi csere alkalmával az egyik lámpába A, a másikba B típusú fénycső került. Mi a valószínűsége, hogy a következő cserére kevesebb, mint 4000 óra elteltével lesz szükség? És ha tudjuk, hogy a legutóbbi csere óta 2000 óra telt el, mi a valószínűsége, hogy további 4000 óráig nem lesz szükség cserére? (Az egyes fénycsövek élettartama függetlennek tekinthető.)

b) A takarékosság jegyében a doktorandusz szobába egy olcsó boltból szerzik be a fénycsövet, ahol azokat csomagolás nélkül, a rendetlenség miatt jól összekeveredve tárolják. A kupac 10%-a "selejtes", be se kapcsol, a maradék egyenlő arányban A, illetve B típusú. Vaktában választva, mi lesz a doktorandusz szobába kerülő fénycső élettartamának eloszlásfüggvénye?

c) Mi a valószínűsége, hogy a doktorandusz szobába kerülő fénycső több, mint 4000 óráig bírja? És ha ez a fénycső már kibírt 2000 órát, mi a valószínűsége, hogy még további 4000 óráig bírni fogja?

A normális eloszlásfüggvény

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000