6. HF:

6.1 Tegyük fel, hogy X eloszlásfüggvénye, F a következőképpen adott:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } b < 0 \\ \dfrac{b}{4} & \text{ha } 0 \le b \le 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{b-1}{4} & \text{ha } 1 < b \le 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{ha } 2 < b \le 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < b \end{cases}$$

a) Számoljuk ki $\mathbf{P}\{X = i\}$-t, $i = 1, 2, 3$.

b) Mennyi $\mathbf{P}\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\}$?

6.2 Egy rendszer a bekapcsolástól számítva X hónapig működik. Határozzuk meg X várható értékét, és annak valószínűségét, hogy a rendszer legalább 5 hónapig működik, ha X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} Cx\mathrm{e}^{-x/2} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \le 0. \end{cases}$$

6.3 Legyen

$$f(x) = \begin{cases} C(3x - x^3) & \text{ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

és

$$g(x) = \begin{cases} C(3x - x^2) & \text{ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Lehet-e f ill. g sűrűségfüggvény? Ha igen, határozzuk meg C-t és az f ill. g által meghatározott eloszlások várható értékét!

6.4 Az A és B konstansok milyen értéke mellett lehetnek eloszlásfüggvények a következő függvények?

a) •

$$F(x) = \exp(-Ae^{-Bx});$$

b)

$$F(x) = A + B \operatorname{arc\,tg} x;$$

c) •

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < x \le 0, \\ \dfrac{A + x}{1 + Bx} & \text{ha } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

6.5 A C konstans milyen értéke mellett lehetnek sűrűségfüggvények a következő függvények? Ezekben az esetekben állapítsuk meg a várható értéket, valamint annak valószínűségét, hogy a megfelelő val. változó értéke nagyobb, mint 2.

a) •

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot \sin(2\pi x) & \text{ha } 0 \le x \le \dfrac{3}{2}, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot (-\ln(x/10)) & \text{ha } 0 < x \le 10, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

c) •

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot x^{-5} & \text{ha } 1 \le x, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

6.6 Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Hogyha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1 - x)^4, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01-nél kisebb valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

6.7 Tudjuk, hogy minden Y nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{Y > t\}\,\mathrm{d}t.$$

Mutassuk meg, hogy egy X nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty nx^{n-1}\mathbf{P}\{X > x\}\,\mathrm{d}x$$

teljesül. (*Tipp: kezdjük azzal, hogy*

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{X^n > t\}\,\mathrm{d}t,$$

majd cseréljünk változót ($t := x^n$)*.*)

6.8 **a)** Legyen X valószínűségi változó várható értéke μ, szórásnégyzete σ^2, és a harmadik momentuma is véges. Továbbá legyen g egy háromszor differenciálható függvény. Ha tudjuk, hogy X centrált harmadik momentuma elhanyagolható, akkor mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(g(X)) \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2}\sigma^2.$$

(*Tipp: fejtsük g-t μ körül 3 tagig Taylor sorba, és hanyagoljuk el a megmaradó részt!*)

b) Legyen X egy λ várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ha λ tart végtelenhez, akkor

$$\mathbf{D}^2(\sqrt{X}) \approx 0.25.$$

Lepődjünk meg. (*Tipp: használjuk fel az előző feladatot* $\mathbf{E}(\sqrt{X})$ *közelítésére!*)

6.9 Legyen $F(x)$ *folytonos* eloszlásfüggvény, és $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy

$$G(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -\infty < x \le 1, \\ F(x) - F(x^{-1}), & \text{ha } 1 < x < \infty \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény. Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formulának.

6.10 Egyenletesen választunk egy pontot a $(0, 1)$ intervallumból, jelölje ezt X. Mi annak a valószínűsége, hogy X, $1 - X$ és $1/2$ háromszöget alkot?

6.11 Konstruálható-e olyan folytonos $g : [0, 1] \to [0, \infty)$ függvény, amelyre $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 x \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a$, $\int_0^1 x^2 \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a^2$?

Bónusz Ha egy találkozóra $s \in \mathbb{R}$ perccel korábban érkezem a megbeszéltnél, $a \cdot s$ petákot fizetek, ha s percet kések, $b \cdot s$-t fizetek. Az utazás a mai kaotikus közlekedési feltételek miatt meglehetősen véletlen ideig tart, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)$. Mikor induljak, ha a várható költséget szeretném minimalizálni? (Tipp: Írjuk fel a várható költséget integrálalakban és deriváljuk.)

6.12 A buszok rendre minden óra egészkor, 15-kor, 30-kor és 45-kor indulnak a megállóból. Ha véletlenszerűen érkezem 7:00 és 7:30 közt, mi annak a valószínűsége, hogy

a) 5 percnél kevesebet várok?

b) 8 percnél többet várok?

c) Ugyanez a két kérdés, ha 7:08 és 7:38 közt érkezem egyenletesen.

d) És ha 7:00 és 7:25 közt érkezem egyenletesen?

6.13 •• A felé a vonatok 15 percenként indulnak 7:00-tól kezdve, míg B felé 15 percenként indulnak 7:05-től kezdve.

a) Ha egy utas 7:00 és 8:00 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra, majd felszáll arra a vonatra amelyik hamarabb indul, az esetek hányadrészében megy A felé, és hányadrészében B felé?

b) És ha az utas 7:10 és 8:10 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra?

c) Mi a helyzet akkor, ha B felé gyakrabban, vagyis 7:05-től kezdve 10 percenként indulnak a buszok? Számoljuk ki az előző két kérdés valószínűségét erre az esetre is!

6.14 Egy busz A és B városok között jár, mely városok 100 kilométerre vannak egymástól. Ha a busz lerobban, akkor azt egyenletes eloszlású helyen teszi a két város közötti úton; ilyenkor a legközelebbi szervízből kijönnek a szerelők és megjavítják a buszt a helyszínen. Pillanatnyilag egy buszszerviz található az A városban, egy a B városban, és egy a két város között félúton. Egy javaslat szerint ehelyett gazdaságosabb lenne a három szervizt az A várostól 25, 50, és 75 kilométerre elhelyezni. Egyetértünk-e a javaslattal? Miért? Mi lenne a szervizek legjobb elhelyezése? Milyen értelemben?

6.15 Egy egységhosszú ropin van egy sódarab az s helyen. Mire hazaérünk a boltból, a táskánkban véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kettétörik a ropi a csomagban. Mi a sódarabot tartalmazó ropidarab hosszának várható értéke?

6.16 •• Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlással egy egyenlő oldalú háromszög belsejében, mely háromszögnek minden oldala 1 hosszúságú. Jelölje ξ e pontnak a távolságát a háromszög legközelebbi oldalától. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

6.17 •• Pistike randevút beszélt meg Juliskával este 6-ra. Pistike két úton is eljuthat a megbeszélt randevú helyszínére, a két út között érmedobással dönt. Az utakon való végigjutás ideje két valószínűségi változót határoz meg: A-t és B-t.

- Az A sűrűségfüggvénye (percekben számolva):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 5 \text{ vagy } x > 20, \\ \frac{2}{75}(x-5) & \text{ha } 5 \le x < 10, \\ \frac{1}{75}(20-x) & \text{ha } 10 \le x \le 20. \end{cases}$$

- A B sűrűségfüggvénye pedig:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 5, \\ \frac{1}{10}\exp\left(-\frac{x-5}{10}\right) & \text{ha } x > 5. \end{cases}$$

Pistike 6-kor indul útnak, mert elfelejtette nézni az órát. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak, ha Juliska nem egy türelmes természet, és maximum tíz percet hajlandó várni?

6.18 Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebb eloszlásfüggvénye?

6.19 Válasszunk két pontot függetlenül és egyenletesen az egységkör kerületén. Határozzuk meg a távolságuk eloszlásfüggvényét.

6.20 Válasszunk az egységnégyzetben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) egy pontot. Jelölje ξ e pontnak a négyzet legközelebbi csúcsától való távolságát. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.