2. HF:

2.1 Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyiken hatos van?

2.2 Egy piros, egy kék, és egy sárga szabályos kockával dobunk. Legyen az általuk mutatott három szám rendre P, K, S.

- **a)** Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás különböző?
- **b)** Feltéve, hogy mindhárom dobás különböző, mi a valószínűsége, hogy $P < K < S$?
- **c)** Mennyi $\mathbf{P}\{P < K < S\}$?

2.3 •• A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 kártyalap van, minden színből 5. Kiosztunk $5-5$ lapot.

- **a)** Még nem néztem meg a lapjaimat. Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?
- **b)** Megnéztem a lapjaimat: két pirosat és három zöldet kaptam. Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?

2.4 Vigyázat! Ebben a feladatban attól függően, milyen kísérlettel modellezzük a „véletlenszerű én" és a „véletlenszerű király" kiválasztását, különböző eredményeket kaphatunk. A megoldás része pontosan leírni azt is, hogy milyen kísérletben gondolkodunk és milyen feltevésekkel élünk.

- **a)** Én kétgyerekes családból származom. Mi a valószínűsége, hogy a testvérem lány?
- **b)** A király kétgyerekes családból származik. Mi a valószínűsége, hogy a testvére lány?

2.5 Két golyó mindegyike egymástól függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel feketére vagy aranyszínűre lett festve, majd egy urnába helyezték őket.

- **a)** Tegyük fel, hogy tudomásunkra jut, hogy az aranyszínű festéket használták, azaz legalább az egyik golyó aranyszínű lett. Ekkor mi a feltételes valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?
- **b)** Most tegyük fel, hogy az urna megbillent, az egyik golyó kigurult belőle, és azt látjuk, hogy ez a golyó aranyszínű. Ekkor mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

Magyarázzuk meg a válaszunkat.

2.6 •• Egy internetes közösségi szájt felhasználói körébe meghívásos alapon lehet bejutni. Eredetileg két tagja van a közösségnek, Ádám és Éva. Néha a közösség valamelyik (egyenletesen választott) tagja meghív egy új embert. Ádám köréhez tartozik valaki, ha ő maga Ádám, vagy egy Ádám köréhez tartozó tag hívta meg. Mi a valószínűsége, hogy Ádám köre 1, 2 illetve 3 főből áll akkor, amikor 4 fős a közösség?

2.7 Egy tehetségkutató versenyen három fordulóban válogatnak. Az első fordulóból hazaküldik a jelentkezők 80%-át, a többiek továbbjutnak a második fordulóba. A második forduló résztvevőinek 70%-ától bucsúznak el, aki ezen a rostán is túljut, mehet a harmadik fordulóba, ahol a résztvevők negyedét válogatják be a televíziós felvételre.

- **a)** A jelentkezők hányad része jut el a televíziós felvételre?
- **b)** Valakiről csak annyit tudunk, hogy túljutott az első fordulón. Mi a valószínűsége, hogy látni fogjuk a TV-ben?
- **c)** Tekintsük mindazokat a jelentkezőket, akik nem jutottak el a televíziós felvételig. Hányad részüket küldték haza rendre az első, a második és a harmadik fordulóban?

2.8 •• Három szakács, A, B és C, egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.02, 0.03, 0.05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak, A süti a sütemények 50%-át, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. A rossz sütemények hány százalékát sütötte A?

2.9 A piacon a 10 tojást tartalmazó dobozok 60%-ában minden tojás ép, 30%-ában pontosan egy tojás törött, 10%-ában pontosan két tojás törött. A törött tojások helye a dobozban véletlenszerű. Veszek egy doboz tojást a piacon és bosszankodva tapasztalom, hogy az első tojás, amit kiveszek a dobozból, törött. Mi a valószínűsége, hogy a dobozban ott lapul még egy törött tojás?

2.10 Egy első- és másodévesek által látogatott tárgyat 8 elsőéves fiú, 6 elsőéves lány, 4 másodéves fiú vett fel. Hány másodéves lány vette fel a tárgyat, ha tudjuk, hogy egy, a tárgy hallgatói közül véletlenül választott hallgató neme és évfolyama független egymástól?

2.11 Egy genetikai rendellenesség a magzatok fél százalékát érinti. Egy „megbízhatónak számító" diagnosztikai eljárás a meglévő rendellenességet biztosan detektálja, míg rendellenesség hiányában 95% valószínűséggel a helyes negatív választ adja, 5% valószínűséggel pedig a hibás pozitív választ. Ha az eljárás erdeménye pozitív, mi a valószínűsége, hogy magzatunknak tényleg megvan a rendellenessége?

2.12 Tegyük fel, hogy szabályos fej-írás dobást szeretnénk generálni, de csak egy cinkelt érme áll rendelkezésünkre, amely általunk ismeretlen p valószínűséggel mutat fejet. Tekintsük a következő eljárást.

(a) Feldobjuk az érmét.

(b) Megint feldobjuk az érmét.

(c) Ha mindkét dobás eredménye fej, vagy mindkét dobás eredménye írás, akkor újrakezdjük az első lépéssel.

(d) Ha viszont a két dobás eredménye különböző, akkor az utolsó eredmény lesz az algoritmus kimenete.

a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyforma valószínűséggel szolgáltat fejet vagy írást.

b) Lehetne-e úgy egyszerűsíteni az eljárást, hogy addig dobjuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást tekintjük?

2.13 •• Egy n elemű halmazból az A és B véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a 2^n lehetséges részhalmaz közül.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \subseteq B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. (*Tipp: tekintsük az eredeti halmaz minden egyes elemét.*)

b) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \cap B = \emptyset\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2.14 •• Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik. Mutassuk meg, hogy A, B és C páronként függetlenek, de nem függetlenek.

2.15 Adott egy n fős társaság. Jelölje $A_{i,j}$; $1 \le i < j \le n$ azt az eseményt, hogy a társaság i-dik és j-dik tagjának ugyanaz a születésnapja.

a) Páronként független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény?

b) Teljesen független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény?

2.16 Az időjárás-előrejelzés egyszerű modelljeként tegyük fel, hogy az idő vagy esős, vagy napos, és p annak a valószínűsége, hogy holnap ugyanolyan lesz mint ma, a korábbi napoktól függetlenül. Ha az idő napos január elsején, legyen P_n annak valószínűsége, hogy n nap múlva szintén napos. Mutassuk meg, hogy P_n kielégíti a

$$P_n = (2p-1)P_{n-1} + (1-p), \qquad n \ge 1; \qquad P_0 = 1$$

rekurziót. Bizonyítsuk be, hogy $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$ minden $n \ge 0$ esetén.

2.17 Móricka élete első valószínűségszámítás vizsgáján $\frac{1}{2}$ eséllyel megy át. Ha ezen megbukik, a következőre már kevesebbet tanul, ezen csak $\frac{1}{3}$ a siker valószínűsége. Minél többször bukik meg, annál kevesebbet tanul, így $k-1$ sikertelen vizsga után már csak $\frac{1}{k+1}$ az esélye, hogy a k-dik vizsgán átmegy. Ám Móricka kitartó, és a szabályzat szerint akárhányszor vizsgázhat. Mennyi a valószínűsége, hogy előbb-utóbb átmegy?

Bónusz Egy vadász 30 méter távolságban felfedez egy rókát és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebességgel próbál menekülni. A vadász 3 másodpercenként újratölt és lő a rókára, mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el nem tűnik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság négyzetével fordítottan arányos, a következő képlet szerint:

$$\mathbf{P}\{\text{a vadász eltalálja az } x \text{ méter távolságban levő rókát}\} = 675x^{-2} \qquad (x \ge 30).$$

Ha találat is éri a rókát, nem biztos, hogy fatális: az egyes találatokat (függetlenül azok számától) a róka $1/4$ valószínűséggel túléli. Mi a valószínűsége annak, hogy a róka túléli ezt a kellemetlen kalandot?

(*Tipp: Analízisből tudjuk, hogy ha* $0 < \varepsilon_n < 1$ *minden* n*-re, akkor* $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n) > 0$ *pontosan akkor, ha* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$.)

Megjegyzés: A feladatot nyilván matematikusok találták ki matematikus diákoknak. Miért rossz modellje ez a rókavadászatnak?

2.18 Iszákos Iván a nap $2/3$ részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

2.19 Móricka és Pistike pingpongoznak. Minden játszmát a többitől függetlenül Móricka p, Pistike pedig q valószínűséggel nyer meg, ahol $p > 0$, $q > 0$ és $p + q = 1$. A játék akkor ér véget, ha valaki két egymás utáni játszmát megnyer.

a) Mi a valószínűsége, hogy Móricka nyeri az utolsó játszmát?

b) Mi a valószínűsége, hogy ugyanaz nyeri az első játszmát, mint az utolsót?

c) Ha tudjuk, hogy az utolsó játszmát Móricka nyerte, mennyi a valószínűsége, hogy az elsőt is?

2.20 Egy televíziós vetélkedőben a játékosnak három ajtó közül kell választania, és a mögötte elrejtett nyereményt kapja jutalmul. Az egyik ajtó mögött egy luxusautó található, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske. Mikor a játékos kiválasztott egyet a háromból, a játékvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, ami mögött kecske van, és felajánlja, hogy a játékos még megváltoztathatja a döntését. Érdemes-e áttérni a másik ki nem nyitott ajtóra? Mekkora valószínűséggel nyerjük meg így az autót?

2.21 n dobozban elhelyezünk N golyót úgy, hogy mind az n^N elhelyezés egyenlően valószínű. Feltéve, hogy egy adott dobozba esik golyó, mennyi a valószínűsége annak, hogy K golyó esik bele?

2.22 Aladár, Béla, Cili és Dömötör hazudósak: átlagosan az esetek 2/3-ában hazudnak mind a négyen, egymástól függetlenül, véletlenszerűen.

Aladár azt állítja, hogy Béla tagadja, hogy Cili azt mondta, hogy Dömötör hazudott.

Mi a valószínűsége annak, hogy Dömötör igazat mondott? (Feltételezzük, hogy Aladár tudja, hogy mit mindott Béla, Béla tudja, hogy mit mindott Cili, Cili tudja, hogy mit mindott Dömötör. Továbbá, hogy Cili azt is el tudja dönteni, hogy Dömötör hazudott-e vagy sem.)

2.23 Adott egy (végtelen térfogatú) urnánk és végtelen sok, az $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ elemeivel számozott, golyónk. Az urna eredetileg üres. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az $1, 2, \dots, 10$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a $11, 12, \dots, 20$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt 2^{-n} perccel fogjuk az $10n+1, 10n+2, \dots, 10(n+1)$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. És ezt így folytatjuk éjfélig. Bizonyítandó, hogy éjfélkor az urna 1 valószínűséggel üres lesz.