11. HF:

11.1 •• Jelölje D az origó középpontú egységkörlap és a $(2, 1)$ középponttú $\frac{1}{2}$ sugarú körlap unióját. Legyen (X, Y) a D-ben egyenletes eloszlás szerint választott véletlen pont koordinátapárja. Határozzuk meg X és Y várható értékét és szórását.

11.2 Dobok egy dobókockával. Ha az eredmény i, akkor folytonos egyenletes eloszlás szerint választok egy számot a $(0, i)$ intervallumon. Mi lesz a kapott szám várható értéke és szórása?

11.3 Legyen X és Y a két koordinátája annak a pontnak, melyet az origó középpontú, 1 sugarú körlapon egyenletesen választottunk. (Azaz: a közös sűrűségfüggvény $f(x, y) = 1/\pi$, ha $x^2 + y^2 \le 1$.) Határozzuk meg az $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ és a $\Theta = \operatorname{arc\,tg} Y/X$ valószínűségi változók közös sűrűségfüggvényét.

11.4 •• Legyen U_1, U_2 két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$-en. Bizonyítsuk be, hogy ha $X = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$ és $Y = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$, akkor az (X, Y) pár kétdimenziós normális eloszlású.

11.5 Legyen X és Y két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy az $U := X + Y$ és $V := X/(X + Y)$ valószínűségi változók függetlenek.

11.6 Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye legyen $h(x, y) = f(x)f(y)$ alakú, ahol $f(x)$ egydimenziós sűrűségfüggvény. Legyen $U = \max\{X, Y\}$ és $V = \min\{X, Y\}$. Határozzuk meg U és V együttes eloszlásfüggvényét és ennek sűrűségfüggvényét.

11.7 Legyen $\underline{X} = (X_1,\, X_2,\, X_3)$ háromdimenziós véletlen vektor, amelynek komponensei független $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlásúak. Definiáljuk a következő változókat:

$$\varrho := \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \qquad \xi_i := X_i/\varrho, \qquad i = 1, 2, 3.$$

a) Határozzuk meg ϱ sűrűségfüggvényét.

b) Bizonyítsuk be, hogy ϱ és a $\underline{\xi} = (\xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3)$ vektorváltozó egymástól függetlenek, továbbá azt, hogy a $\underline{\xi}$ véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységgömb felszínén.

Bónusz Legyen X és Y két független standard normális eloszlású valószínűségi változó.

a) Tekintsük az (X, Y) véletlen pontot a síkon, és tekintsük az (U, V) transzformált valószínűségi változókat, ahol $U = X^2 + Y^2$ és $V = Y/X$. Bizonyítsuk be, hogy U eloszlása exponenciális, V eloszlása pedig standard Cauchy, és a két valószínűségi változó független.

b) Számítsuk ki a $\mathbb{E}(X^2/U^2)$ és a

$$\mathbb{E}\left(\frac{\min(|X|, |Y|)}{\max(|X|, |Y|)}\right)$$

várható értékeket.

11.8 Legyenek X és Y függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[-1, 1]$ intervallumon. Legyenek $U_\theta = cos(\theta) \cdot X + sin(\theta) \cdot Y$ és $V_\theta = -sin(\theta) \cdot X + cos(\theta) \cdot Y$.

(a) Határozza meg X és Y kovarianciamátrixát!

(b) A θ paraméter mely értékei esetén lesznek U_θ és V_θ korrellálatlanok?

(c) A θ paraméter mely értékei esetén lesznek U_θ és V_θ függetlenek?

11.9 Határozzuk meg X és Y kovarianciamátrixát, ahol X egy $\lambda = 2$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó és $Y = 2X + 1$.

11.10 Legyenek X és Y független $\mathcal{N}(0, 1)$ illetve $\mathcal{N}(0, 4)$ eloszlású valószínűségi változók és M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az $\mathbb{R}^2$ síkon, melynek koordinátái $(X;\, Y)$. Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

a) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le 1,\ |y| \le 2\}$,

b) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ |y| \le 2\}$,

c) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}$,

d) • $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y \le x,\ |y| \le 1,\ x \ge -3\}$,

e) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + (y^2/4) \le 1\}$,

f) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + (y^2/4) \le c^2\}$.

11.11 Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az (X, Y) koordinátájú véletlen pont beleesik az

a) • $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3\}$ körgyűrűbe;

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le \min(|x|, |y|) \le \max(|x|, |y|) \le 3\}$ tartományba;

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \le |x| + |y| \le 3\}$ tartományba.

11.12 Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az (X, Y) koordinátájú véletlen pont a $(0, 3)$, $(4, 0)$, $(1.8, 5.4)$, $(5.8, 2.4)$ csúcsú téglalapba esik.

11.13 Legyen (X, Y) kétdimenziós normális eloszlású $(0, 0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az (X, Y) koordinátájú véletlen pont beleesik abba a szabályos háromszögbe, melynek egyik oldala a $[-1, 1]$ intervallum az x tengelyen, harmadik csúcspontja pedig a $(0, \sqrt{3})$ koordinátájú pont.

11.14 $^{\bullet\bullet}$ Egy részecske tömegét két kutatócsoport is szeretné kimérni, az első csoport k mérést végez és átlagolja ezek eredményét, a második csoport ℓ mérést végez és szintén átlagol. Az egyes mérések független azonos normális eloszlásúak, a várható érték a részecske tényleges μ tömege, a szórás σ. Mi a valószínűsége, hogy az első csoport eredménye pontosabb, mint a második csoport eredménye?

11.15 Legyenek X és Y független és azonos $\mathcal{N}(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a

$$Z := e^{(X^2+Y^2)/2}(1+X^2+Y^2)^{-3/2}$$

valószínűségi változó várható értékét és szórását.

11.16 Legyen X standard normális valószínűségi változó. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}\,(\cosh(X), \sinh(X))$ értékét.

11.17 $^{\bullet\bullet}$ Legyen X $\mathcal{N}(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó és $Y := \text{sign}(1-|X|)\cdot X$.

(a) Határozzuk meg az Y valószínűségi változó eloszlását.

(b) $Z := X + Y$ eloszlása normális-e?

11.18 Legyen X standard normális eloszlású, és I X-től független, $\mathbf{P}\{I=1\} = \mathbf{P}\{I=0\} = 1/2$ eloszlással. Definiáljuk a következő valószínűségi változót:

$$Y := \begin{cases} X, & \text{ha } I = 1, \\ -X, & \text{ha } I = 0. \end{cases}$$

Azaz: Y (X-től függetlenül) egyenlő eséllyel lesz X vagy $-X$.

a) Mutassuk meg, hogy Y standard normális eloszlású.

b) Független-e I és Y?

c) Független-e X és Y?

d) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

11.19 Az $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozó legyen kétdimenziós normális eloszlású $\underline{m} = (-1, 1)$ várhatóérték-vektorral és $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Számítsuk ki a $\mathbf{P}\{X \geq -1,\ Y \geq 1\}$ valószínűséget! (*Tipp:* $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}^2$*, ahol* $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.)

11.20 **a)** A feltételes kovariancia a feltételes várható értékkel úgy van definiálva, mint a kovariancia a várható értékkel. Vezessük le a *feltételes kovariancia formulát*:

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\big(\mathbf{Cov}(X, Y \mid Z)\big) + \mathbf{Cov}\big(\mathbf{E}(X \mid Z),\, \mathbf{E}(Y \mid Z)\big).$$

b) Hamis érmével dobunk, melynél a *fej* valószínűsége p, az *írásé* pedig $q = 1-p$. Jelöljük X-szel és Y-nal az első, illetve a második tiszta (fej vagy írás) sorozat hosszát. (Pl. ha dobássorozatunk $FFFIIF\ldots$, akkor $X=3, Y=2$; ha pedig dobássorozatunk $IFFI\ldots$, akkor $X=1, Y=2\ldots$) Határozzuk meg a következő mennyiségeket: $\mathbf{E}X$, $\mathbf{E}Y$, $\mathbf{E}X^2$, $\mathbf{E}Y^2$, $\mathbf{D}^2X$, $\mathbf{D}^2Y$, $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

11.21 Egy négyzetrácsos papírra egy tintapaca csöppen. Mekkora a valószínűsége, hogy a paca nem metszi a vonalakat, ha azok fél centire vannak egymástól, a tintafolt sugara pedig egyenletes eloszlású a $[0\,\text{cm},\ 1/3\,\text{cm}]$ intervallumon?

11.22 Emlékezzünk vissza a Szindbád feladatra! Az ott leírt feltételek mellett jelölje X_n azt, hogy a sorban n-edik hölgy hányadik legszebb az első n hölgy közül. Például ha az egymás utáni hölgyek egyre szebbek, akkor a sorozat $1,\ 1,\ \ldots,\ 1$ lesz, ha egyre csúnyábbak, akkor $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N$. Bizonyítsuk be, hogy az $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_N$ valószínűségi változók teljesen függetlenek.

11.23 Legyen $Y \sim \mathcal{N}(\mu,\ 1)$, és $X \mid Y \sim \mathcal{N}(Y,\ 1)$.

a) Mutassuk meg, hogy az (X, Y) pár együttes eloszlása ugyanaz, mint az $(Y+Z, Y)$ páré, ahol Z egy Y-tól független standard normális valószínűségi változó.

b) Ennek segítségével mutassuk meg, hogy az $X,\ Y$ pár kétdimenziós normális eloszlású.

c) Számítsuk ki az $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}^2X$, $\mathbf{Corr}(X, Y)$ mennyiségeket.

d) Határozzuk meg $\mathbf{E}(Y \mid X = x)$ értékét.

e) Mi Y feltételes eloszlása az $X = x$ feltétel mellett?