Félévi időbeosztás [házi feladat beadási határidőkkel]
Figyelem! Ez a file az év során változhat, pld a HF beadási határidőket a gyakvezérek esetleg módosíthatják!
Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2017 ősz

-vel kez-dődő hét	**Előadás** H 12-14 Bálint Péter	**Matgyak** K 12-14 Szvák Edina	**Fizgyak** K 14-16 Pete Gábor	**MatFizgyak** P 10-12 Pete Gábor
Szept. 4	E1	Gy1	Gy1	Gy1
Szept. 11	E2	Gy2 **[1. HF]**	Gy2 **[1. HF]**	Gy2 **[1. HF]**
Szept. 18	E3	Gy3 **[2. HF]**	Gy3 **[2. HF]**	Gy3 **[2. HF]**
Szept. 25	E4	Gy4 **[3. HF]**	Gy4 **[3. HF]**	Gy4 **[3. HF]**
Okt. 2	E5	**TTK dékáni szünet**	**TTK dékáni szünet**	Gy5 **[4. HF]**
Okt. 9	E6	Gy5 **[4. HF]**	Gy5 **[4. HF]**	Gy6 **[5. HF]**
Okt. 16	E7	Gy6 **[5. HF]**	Gy6 **[5. HF]**	Gy7 **[6. HF]**
Okt. 23	**Tanítási szünet**	Gy7 **[6. HF]**	Gy7 **[6. HF]**	Gy8 **[7. HF]**
Okt. 30	E8	Gy8 **[7. HF]**	Gy8 **[7. HF]**	Gy9 **[8. HF]**
Nov. 6	E9	Gy9 **[8. HF]**	Gy9 **[8. HF]**	Gy10 **[9. HF]**
Nov. 13	E10	Gy10 **[9. HF]**	Gy10 **[9. HF]**	Gy11 **[10. HF]**
Nov. 20	E11	Gy11 **[10. HF]**	Gy11 **[10. HF]**	**Középisk. nyílt nap**
Nov. 27	E12	Gy12	Gy12	Gy12
Dec. 4	E13	Gy13 **[11. HF]**	Gy13 **[11. HF]**	Gy13 **[11. HF]**

Előadás napló

09.04 Bevezető példák. Eseménytér, mértékelmélet, egyszerű állítások. Szita formula.

Ajánlott irodalom

Az elsődleges forrás, amit az elődások beosztása is viszonylag pontosan követ, a Balázs Márton – Tóth Bálint jegyzet. Más könyvjavaslatokkal együtt a kurzus honlapján megtalálható:
`http://www.math.bme.hu/~pet/valszam/Vsz2017.html`.

HF feladatsor témák

Ez csak körülbelüli iránymutató. Az előadás menetétől függően a témák esetleg vándorolhatnak, régebbi témák mindig visszatérhetnek, a fő csapásiránytól eltérő érdekességek fölbukkanhatnak.

1. Alapvető kombinatorika, szita-formula, eseménytér, egyenlő valószínűségű események
2. Feltételes val., Bayes tétel, (feltételes) függetlenség
3. Diszkrét valváltozók 1. Binomiális, geometriai, negatív binom, hipergeom.
4. Diszkrét valváltozók 2. Várható érték és szórás, Poisson eloszlás
5. Poisson folyamat, eloszlásfüggvény, sűrűségfüggvény, esetleg egyenletes eloszlás

   (ZH1 itt)
6. Egyenletes eo, normális eloszlás, binomiális és Poisson eloszlás normális approximációja, deMoivre-Laplace
7. Exponenciális eloszlás, Poisson folyamat megint, Cauchy és lognormális eloszlás, eloszlástranszformációk
8. Diszkrét és folytonos együttes eloszlások, többdimenziós eloszlástranszformációk
9. Többdimenziós eloszlástranszformációk, függetlenség és konvolúció, feltételes eloszlások, feltételes várható érték
10. Összegek várható értéke, szórása, kovarianciák, korrelációk, indikátorok összege

    (ZH2 valószínűleg itt)
11. Többdimenziós normális és korrelációi (ez talán átcsúszhat az utolsó gyakra)
12. Utolsó gyakorlaton meglátjuk, lehet csak gyakorlás, vagy kitekintés más témákra, ízlés szerint.

Házi feladatok

Valószínűségszámítás matematikusoknak és fizikusoknak, 2017 ősz

A feladatok közül minden héten a beadandó házi feladatok meg vannak jelölve, ezek 1 (•), 2 (••) vagy 3 pontot (•••) érnek, összesen 10 pont értékben. Természetesen gyakorlásképpen javasoljuk a többi feladat beadás nélküli megoldását is. Egyes heteken szerepelnek bónuszfeladatok, ezek darabonként 3 pontot érnek. Függetlenül a többi feladattól, ezek az adott héten minden esetben beadhatók, és mindig kijavítjuk őket. A házi feladatok beadási határideje az első oldalon szerepel.

Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el. Az *igazi* csoportmunka hasznos, de ebben az esetben mindenki saját maga írja le a megoldást a saját szavaival (képleteivel). A passzív másolás viszont haszontalan: tapasztalatunk szerint az így szerzett házi feladat pontszámok többszörösen elvesznek ZH-kon és a vizsgán, amikor kiderül, hogy a másolt házi feladat nem hozta meg a kívánt fejlődést.

1. HF:

1.1 Hányféle (esetleg értelmetlen, de különböző) szót lehet kirakni a MISSISSIPPI betűiből (mindegyik betűt pontosan egyszer felhasználva)? Hát az ABRAKADABRA szó betűiből? Mi annak a valószínűsége, hogy ha felírjuk a betűket egy-egy kártyára, akkor jól megkeverve a paklit, a két szó egymást követve értelmesen kiolvasható lesz (abrakadabramississippi vagy fordítva)?

1.2 **a)** Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú?

b) Hányféleképpen ülhet le egy sorban négy lány és három fiú, ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?

c) És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?

d) Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

1.3 Egy tánciskolába 12 hölgy és 13 úriember jár. Ha 6 hölgyet és 6 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?

1.4 Egy társaság 8 nőből és 7 férfiból áll. Belőlük kell egy 4 nőből és 3 férfiból álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha

a) van két férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni,

b) van két nő, akik nem hajlandók egy bizottságban dolgozni,

c) van egy nő és egy férfi, akik nem hajlandóak egy bizottságban dolgozni?

1.5 Egy árverésen 4 műgyűjtő vásárolt összesen 5 Dalit, 6 van Goghot, és 7 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?

1.6 **a)** Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára olymódon, hogy n emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

b) Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

azonosságot $n = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra: n emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

– válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,

– válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

c) A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3\binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

1.7 Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 26%	I és II: 6%	I és II és III: 2%
II: 18%	I és III: 9%	
III: 22%	II és III: 5%	

(Azaz például 6000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 2000 a III újságot is).)

a) Határozzuk meg, hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.

b) Hányan olvasnak pontosan egy újságot?

c) Hányan olvasnak legalább kettő újságot?

d) Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

e) Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

1.8 **a)** Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

ha $\mathbf{P}\{A\} \geq 0.8$ és $\mathbf{P}\{B\} \geq 0.6$, akkor $\mathbf{P}\{A \cap B\} \geq 0.4$.

b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

1.9 **a)** n golyót helyezünk véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres?

b) n befektetési egységet osztunk szét k részvény között. Befektetési stratégiáknak nevezzük a befektetési egységek lehetséges kiosztásait, vagyis amikor minden részvényre megadjuk, hogy abba hány egységet fektetünk be. Ha minden befektetési stratégia azonos valószínűségű, mi az esélye annak, hogy pontosan egy olyan részvény lesz, amelybe egyetlen egységet sem fektetünk be?

1.10 Egy régi vágású színházban a fogasra akasztják az érkező urak a kalapjaikat. Kifelé menet minden úr véletlenszerűen levesz egy kalapot a fogasról, és távozik. Mi annak a valószínűsége, hogy senki nem megy haza a saját kalapjában? Hogyan viselkedig ez a valószínűség aszimptotikusan amint $n \to \infty$?

1.11 •• Egy sakktábla 64 mezőjére véletlenszerűen, egyenletes valószínűséggel elhelyezünk nyolc bástyát; egy mezőre csak egy bástya kerülhet. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik bástya sem üti a másikat (azaz semelyik sor és semelyik oszlop nem tartalmaz egynél több bástyát)?

1.12 •••

a) Hatszor feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az $1, 2, ..., 6$ eredmények mindegyike előfordul?

b) Tízszer feldobunk egy szabályos dobókockát. Mi a valószínűsége, hogy az $1, 2, ..., 6$ eredmények mindegyike (legalább egyszer) előfordul?

1.13 A bridzs játékban a négy, égtájakkal azonosított játékos mindegyikének 13 lapot osztanak ki egy 52 lapos francia kártyából. Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy egy bridzsleosztásban Északnak semmilyen értékből se legyen meg mind a négy kártyája (azaz ne legyen se négy 2-e, se négy 3-a,...., se négy K-a, se négy A-a).

1.14 Egy közösségben 20 család van: 5 családban egy gyerek van, 7 családban kettő, 4 családban három, 3 családban négy, 1 családban öt.

a) Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek van, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$?

b) Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$?

1.15 Egy erdőben 18 őz lakik, közülük 5 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 4-et befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?

1.16 Számoljuk ki a poker különböző értékelhető konfigurációinak valószínűségeit. Azaz 52 lapos francia kártyából ($\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K, A$) véletlenszerűen kiválasztunk ötöt. Mi annak a valószínűsége, hogy egy párunk, két párunk, drillünk, sorunk, flush-ünk, fullunk, pókerünk, színsorunk, royal flush-ünk van?

1.17 A bridzsben az 52 lapos fracia kártyából minden játékos 13–13 lapot kap. Mi a valószínűsége annak, hogy Északnak és Délnek *együttesen* k db ásza van ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)?

1.18 Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$?

1.19 Egy kisvárosban n TV-szerelő dolgozik. Egy napon k helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$?

Bónusz: Jelölje f_n azt a számot, ahány n hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje P_n ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.

a) Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$-re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ahol $f_0 = 1, f_1 = 2$. (Hány ilyen sorozat indul fejjel, és hány írással?)

b) Határozzuk meg P_n-t f_n segítségével, és ezek alapján számoljuk ki P_{10} értékét.

1.20 •• Egy urnában van 6 piros, 6 fehér, és 7 kék golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?

1.21 Anna, Bori és Cili egyforma erejű pingpongjátékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll, és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel… Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Ezt mindaddig folytatják, amíg nem nyer valamelyikük kétszer egymás után, ő lesz a körmérkőzés győztese. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?

1.22 •• Anna, Bori és Cili most érmét dobálnak, felváltva egymás után, Anna kezd, majd Bori dob, aztán Cili, majd megint Anna, és így tovább. Ezt mindaddig folytatják, míg valaki fejet nem dob.

a) Írjuk le az eseményteret!

b) Írjuk le az alábbi eseményeket az eseménytéren: $A = \{$ Anna nyer $\}, B = \{$ Bori nyer $\}, (A \bigcup B)^c$!

1.23 A lóversenyen 7 ló indul. Jelölje C azt az eseményt, hogy Csillag az első három hely valamelyikén ér be, R pedig azt, hogy Ráró a 2. helyen végez. Mennyi $C \bigcup R$ valószínűsége? Hány elemi eseményt tartalmaz $C \bigcup R$?

1.24 Kiosztunk egy pakli jól megkevert francia kártyát. Mi a valószínűsége, hogy

a) a pikk ász a 14. kiosztott lap?

b) az első kiosztott ász a 14.-ként kiosztott lap?

c) az első négy lap különböző színű?

d) az első négy lap különböző figurájú?

1.25 Van két kockánk, amelyeket azonos módon színeztünk ki: két lapot pirosra, kettőt zöldre, egyet pedig sárgára, a maradék fehér. Ha feldobjuk őket egyszerre, mi a valószínűsége, hogy ugyanolyan színűre esnek? Mi a valószínűsége annak, hogy az első két feldobásra különböző színűek lesznek, majd harmadszorra ugyanolyanok?

1.26 • 6 férfit és 6 nőt véletlenszerűen két azonos létszámú csoportba osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a két csoportban 3–3 nő, illetve férfi lesz?

1.27 Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

a) nincsen teljes pár,

b) pontosan egy teljes pár van,

c) pontosan két teljes pár van?

2. HF:

2.1 •• Feldobunk négy szabályos dobókockát .

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik kockán hatos van?

b) Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyiken hatos van?

2.2 Egy piros, egy kék, és egy sárga szabályos kockával dobunk. Legyen az általuk mutatott három szám rendre P, K, S.

a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás különböző?

b) Feltéve, hogy mindhárom dobás különböző, mi a valószínűsége, hogy $P < K < S$?

c) Mennyi $\mathbf{P}\{P < K < S\}$?

2.3 A barátommal snapszerozom. Ebben a játékban 20 kártyalap van, minden színből 5. Kiosztunk $5 - 5$ lapot.

a) Még nem néztem meg a lapjaimat. Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?

b) Megnéztem a lapjaimat: két pirosat és három zöldet kaptam. Mi a valószínűsége, hogy a barátomnak van zöldje?

2.4 Vigyázat! Ebben a feladatban attól függően, milyen kísérlettel modellezzük a „véletlenszerű én" és a „véletlenszerű király" kiválasztását, különböző eredményeket kaphatunk. A megoldás része pontosan leírni azt is, hogy milyen kísérletben gondolkodunk és milyen feltevésekkel élünk.

a) Én kétgyerekes családból származom. Mi a valószínűsége, hogy a testvérem lány?

b) A király kétgyerekes családból származik. Mi a valószínűsége, hogy a testvére lány?

2.5 Két golyó mindegyike egymástól függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel feketére vagy aranyszínűre lett festve, majd egy urnába helyezték őket.

a) Tegyük fel, hogy tudomásunkra jut, hogy az aranyszínű festéket használták, azaz legalább az egyik golyó aranyszínű lett. Ekkor mi a feltételes valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

b) Most tegyük fel, hogy az urna megbillent, az egyik golyó kigurult belőle, és azt látjuk, hogy ez a golyó aranyszínű. Ekkor mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

Magyarázzuk meg a válaszunkat.

2.6 Egy internetes közösségi szájt felhasználói körébe meghívásos alapon lehet bejutni. Eredetileg két tagja van a közösségnek, Ádám és Éva. Néha a közösség valamelyik (egyenletesen választott) tagja meghív egy új embert. Ádám köréhez tartozik valaki, ha ő maga Ádám, vagy egy Ádám köréhez tartozó tag hívta meg. Mi a valószínűsége, hogy Ádám köre 1, 2 illetve 3 főből áll akkor, amikor 4 fős a közösség?

2.7 •• Egy népszerű egyetemi szakra három fordulóban felvételiztetnek. Az első forduló egy alkalmassági vizsga, erről hazaküldik a jelentkezők 70%-át, a többiek továbbjutnak a következő fordulóba, ami egy írásbeli teszt. Az írásbeli teszten résztvevők 75%-át szórják ki, aki ezt az akadályt is sikerrel veszi, egy szóbeli elbeszélgetésen vehet részt, ahol a résztvevők ötödét válogatják be, őket veszik fel a szakra.

a) A jelentkezők hányad részét veszik fel a szakra?

b) Valakiről csak annyit tudunk, hogy túljutott az alkalmassági vizsgán. Mi a valószínűsége, hogy fel fogják venni?

c) Tekintsük mindazokat a jelentkezőket, akiket végül nem vesznek fel a szakra. Hányad részüket szórták ki rendre az alkalmassági vizsgán, az írásbeli teszten és a szóbeli elbeszélgetésen?

2.8 Három szakács, A, B és C, egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.02, 0.03, 0.05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak, A süti a sütemények 50%-át, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. A rossz sütemények hány százalékát sütötte A?

2.9 •• A csavarokat 12 darabos csomagokban árusítják. Az üzletben kapható csomagok 80%-ában nincs hibás csavar, 15%-ában pontosan egy hibás csavar van, 5%-ában pontosan két hibás csavar van. A hibás csavarok helye a csomagban véletlenszerű. Veszek egy csomag csavart az üzletben és bosszankodva tapasztalom, hogy az első csavar, amit kiveszek a csomagból, hibás. Mi a valószínűsége, hogy a csomagban ott lapul még egy hibás csavar?

2.10 •• Egy doboz édesség krémmel töltött csokoládés bonbonakat tartalmaz, ezek lehetnek ét- vagy tejcsokisak, a töltelékük pedig kávé- vagy mogyorókrém. A csomagban 6 kávékrémmel töltött étcsoki, 9 mogyorókrémmel töltött étcsoki és 14 kávékrémmel töltött tejcsoki van. Hány mogyorókrémmel töltött tejcsoki van a dobozban, ha tudjuk, hogy a csokoládé fajtája (ét- vagy tejcsoki) és a töltelék egymástól függetlenek?

2.11 Egy genetikai rendellenesség a magzatok fél százalékát érinti. Egy „megbízhatónak számító” diagnosztikai eljárás a meglévő rendellenességet biztosan detektálja, míg rendellenesség hiányában 95% valószínűséggel a helyes negatív választ adja, 5% valószínűséggel pedig a hibás pozitív választ. Ha az eljárás erdeménye pozitív, mi a valószínűsége, hogy magzatunknak tényleg megvan a rendellenessége?

2.12 Tegyük fel, hogy szabályos fej-írás dobást szeretnénk generálni, de csak egy cinkelt érme áll rendelkezésünkre, amely általunk ismeretlen p valószínűséggel mutat fejet. Tekintsük a következő eljárást.

(a) Feldobjuk az érmét.

(b) Megint feldobjuk az érmét.

(c) Ha mindkét dobás eredménye fej, vagy mindkét dobás eredménye írás, akkor újrakezdjük az első lépéssel.

(d) Ha viszont a két dobás eredménye különböző, akkor az utolsó eredmény lesz az algoritmus kimenete.

a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyforma valószínűséggel szolgáltat fejet vagy írást.

b) Lehetne-e úgy egyszerűsíteni az eljárást, hogy addig dobjuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást tekintjük?

2.13 Egy n elemű halmazból az A és B véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a 2^n lehetséges részhalmaz közül.

a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \subseteq B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. (*Tipp: tekintsük az eredeti halmaz minden egyes elemét.*)

b) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \cap B = \emptyset\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2.14 •• Van egy nem (feltétlenül) szabályos érménk, mely $p(\in (0,1))$ valószínűséggel esik a Fej, és $q = 1 - p$ valószínűséggel esik az Írás oldalára. Kétszer egymás után feldobjuk az érmét. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik. Vizsgáljuk meg, hogy p milyen értéke mellett lesznek ezek az események (a) páronként függetlenek; (b) teljesen függetlenek.

2.15 Adott egy n fős társaság. Jelölje $A_{i,j}; 1 \leq i < j \leq n$ azt az eseményt, hogy a társaság i-dik és j-dik tagjának ugyanaz a születésnapja.

a) Páronként független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény?

b) Teljesen független-e ez az $\binom{n}{2}$ esemény?

2.16 Az időjárás-előrejelzés egyszerű modelljeként tegyük fel, hogy az idő vagy esős, vagy napos, és p annak a valószínűsége, hogy holnap ugyanolyan lesz mint ma, a korábbi napoktól függetlenül. Ha az idő napos január elsején, legyen P_n annak valószínűsége, hogy n nap múlva szintén napos. Mutassuk meg, hogy P_n kielégíti a

$$P_n = (2p-1)P_{n-1} + (1-p), \qquad n \geq 1; \qquad P_0 = 1$$

rekurziót. Bizonyítsuk be, hogy $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$ minden $n \geq 0$ esetén.

2.17 Móricka élete első valószínűségszámítás vizsgáján $\frac{1}{2}$ eséllyel megy át. Ha ezen megbukik, a következőre már kevesebbet tanul, ezen csak $\frac{1}{3}$ a siker valószínűsége. Minél többször bukik meg, annál kevesebbet tanul, így $k-1$ sikertelen vizsga után már csak $\frac{1}{k+1}$ az esélye, hogy a k-dik vizsgán átmegy. Ám Móricka kitartó, és a szabályzat szerint akárhányszor vizsgázhat. Mennyi a valószínűsége, hogy előbb-utóbb átmegy?

Bónusz Egy vadász 40 méter távolságban felfedez egy rókát és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebességgel próbál menekülni. A vadász 2 másodpercenként újratölt és lő a rókára, mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el nem tűnik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság köbével fordítottan arányos, a következő képlet szerint:

$$\mathbf{P}\{\text{a vadász eltalálja az } x \text{ méter távolságban levő rókát}\} = 10000 \cdot x^{-3} \qquad (x \geq 40).$$

Ha találat is éri a rókát, nem biztos, hogy fatális: az egyes találatokat (függetlenül azok számától) a róka $1/5$ valószínűséggel túléli. Mi a valószínűsége annak, hogy a róka túléli ezt a kellemetlen kalandot?

Megjegyzés: A feladatot nyilván matematikusok találták ki matematikus diákoknak. Miért rossz modellje ez a rókavadászatnak?

2.18 Iszákos Iván a nap $2/3$ részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

2.19 Móricka és Pistike pingpongoznak. Minden játszmát a többitől függetlenül Móricka p, Pistike pedig q valószínűséggel nyer meg, ahol $p > 0$, $q > 0$ és $p + q = 1$. A játék akkor ér véget, ha valaki két egymás utáni játszmát megnyer.

a) Mi a valószínűsége, hogy Móricka nyeri az utolsó játszmát?

b) Mi a valószínűsége, hogy ugyanaz nyeri az első játszmát, mint az utolsót?

c) Ha tudjuk, hogy az utolsó játszmát Móricka nyerte, mennyi a valószínűsége, hogy az elsőt is?

2.20 Egy televíziós vetélkedőben a játékosnak három ajtó közül kell választania, és a mögötte elrejtett nyereményt kapja jutalmul. Az egyik ajtó mögött egy luxusautó található, a másik kettő mögött pedig egy-egy kecske. Mikor a játékos kiválasztott egyet a háromból, a játékvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, ami mögött kecske van, és felajánlja, hogy a játékos még megváltoztathatja a döntését. Érdemes-e áttérni a másik ki nem nyitott ajtóra? Mekkora valószínűséggel nyerjük meg így az autót?

2.21 n dobozban elhelyezünk N golyót úgy, hogy mind az n^N elhelyezés egyenlően valószínű. Feltéve, hogy egy adott dobozba esik golyó, mennyi a valószínűsége annak, hogy K golyó esik bele?

2.22 Aladár, Béla, Cili és Dömötör hazudósak: átlagosan az esetek $2/3$-ában hazudnak mind a négyen, egymástól függetlenül, véletlenszerűen.
Aladár azt állítja, hogy Béla tagadja, hogy Cili azt mondta, hogy Dömötör hazudott.
Mi a valószínűsége annak, hogy Dömötör igazat mondott? (Feltételezzük, hogy Aladár tudja, hogy mit mondott Béla, Béla tudja, hogy mit mondott Cili, Cili tudja, hogy mit mondott Dömötör. Továbbá, hogy Cili azt is el tudja dönteni, hogy Dömötör hazudott-e vagy sem.)

2.23 Adott egy (végtelen térfogatú) urnánk és végtelen sok, az $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ elemeivel számozott, golyónk. Az urna eredetileg üres. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az $1, 2, \dots, 10$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a $11, 12, \dots, 20$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt 2^{-n} perccel fogjuk az $10n+1,\ 10n+2,\ \ldots,\ 10(n+1)$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. És ezt így folytatjuk éjfélig. Bizonyítandó, hogy éjfélkor az urna 1 valószínűséggel üres lesz.