Építőmérnöki Matematika MSc vizsga 2021.01.19, 9:10-10:40-ig. Minden feladat 15 pont.

Az egyes feladatokat nem feltétlenül kell külön lapra írni, de legyen egyértelmű, hogy melyik megoldás melyik feladathoz tartozik. Kérjük, hogy **állított A4 formátumban** fényképezze le a megoldásait, és azokat így illessze be a pdf fájlba. A javítást jelentősen megkönnyíti, ha a pdf-be a feladatok megoldásait a feladatsoron szereplő sorrendben fűzi össze. Kérem, hogy minden lap tetejére írja fel a nevét és a Neptun kódját.

A megoldásairól készített fényképeket **egyetlen**, (szükség szerint több oldalas), **legfeljebb 10 MByte méretű pdf** fájlban töltse fel a Moodle felületére, pontosabban a `https://edu.epito.bme.hu` oldalon a Matematika MSc Építőmérnököknek, BMETE90MX33 tárgy **Vizsga 2021.01.19-én** Témában (topic) található **"Vizsga" feladat**ba (assignment). A feltöltésre a vizsgát követő 10 perc áll rendelkezésre, azaz ezt **10:50-ig** kell megtennie.

Kérem, hogy a dolgozat elejére jegyezze fel és írja alá a következő mondatot:
„Az alábbi dolgozatot önállóan, külső segítség nélkül, kizárólag a megengedett segédeszközöket használva készítem el.”

1. feladat. Az $u(x,t)$ függvény *véges* húr mozgását írja le:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < t, 0 < x < 3 \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x \le 2 \\ 3 - x & 2 < x \le 3, \end{cases} & \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 3 \\ u(0,t) = 0,\ u(3,t) = 0 & 0 < t \end{cases}$$
Határozza meg *d'Alambert módszerével* $u(0.5, 2)$ értékét.

1. feladat. Az $u(x,t)$ függvény *véges* húr mozgását írja le:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < t, 0 < x < 5 \\ u(x,0) = \begin{cases} x & 0 \le x < 2 \\ 2 & 2 \le x \le 3 \\ 5 - x & 3 < x \le 5, \end{cases} & \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le 5 \\ u(0,t) = 0,\ u(5,t) = 0 & 0 < t \end{cases}$$
Határozza meg *d'Alambert módszerével* $u(0.5, 2)$ értékét.

2. feladat.
Legyen V az $\mathbb{R}^4$ térnek a következő vektorok által kifeszített altere:
$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Válasszunk ki a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vektorok közül néhányat úgy, hogy azok V egy bázisát alkossák!
b) Határozzuk meg $\dim(V)$ és $\dim(V^{\perp})$ értékét.

2. feladat. Legyen V az $\mathbb{R}^4$ térnek a következő vektorok által kifeszített altere:
$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Válasszunk ki a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ vektorok közül néhányat úgy, hogy azok V egy bázisát alkossák!
b) Határozzuk meg $\dim(V)$ és $\dim(V^{\perp})$ értékét.

3. feladat. Mutassuk meg, hogy az $A = \begin{bmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{bmatrix}$ mátrix pozitív definit, majd keressük meg azt a B pozitív definit mátrixot, melyre $A = B^2$.

3. feladat. Mutassuk meg, hogy az $A = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ mátrix pozitív definit, majd keressük meg azt a B pozitív definit mátrixot, melyre $A = B^2$.

4. feladat. Tekintsük az $A = (0,0,0), B = (1,-1,0), C = (2,0,2)$ és $D = (1,1,2)$ pontokat, és legyen γ az $ABCD$ parelelogramma határa $A \to B \to C \to D \to A$ körüljárással. Legyen továbbá
$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (2xz - 2y, z + x + \sin(y^2), 2z + x^2 + 2y).$$

A Stokes tételt használva számolja ki $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ értékét.

4. feladat. Tekintsük az $A = (0, 0, 0), B = (2, 3, 1), C = (2, 4, 0)$ és $D = (0, 1, -1)$ pontokat, és legyen γ az $ABCD$ parelelogramma határa $A \to B \to C \to D \to A$ körüljárással. Legyen továbbá

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = (2xy^2 + 3z, 2yx^2 - z, e^{z^2} + x + y).$$

A Stokes tételt használva számolja ki $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ értékét.

5. feladat. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(-2z^3, 2ye^z + 3, y^2e^z - 6xz^2\right)$ vektormezőt.

a) Curl teszt segítségével döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$.

b) Legyen γ az $A \to B \to C$ töröttvonal, ahol $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 2, 1)$ és $C = (1, 0, 0)$. Határozzuk meg a $\int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált.

5. feladat. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x, y, z) = \left(e^z y - 2x, e^z x + 2yz, e^z xy + y^2\right)$ vektormezőt.

a) Curl teszt segítségével döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$.

b) Legyen γ az $A \to B \to C$ töröttvonal, ahol $A = (1, -2, 0)$, $B = (0, 2, 2)$ és $C = (0, 1, 0)$. Határozzuk meg a $\int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált.

6. feladat. $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x^2y - z, z^3y^2, x + y)$ egy folyadékáramlás időben állandó sebességtere. Egy kis lapátkereket helyezünk $P(0, 1, -1)$ centrummal az áramlás útjába. Hogyan kell választani a lapátkerék síkjának $\overrightarrow{n}$ normálvektorát ahhoz, hogy a lapátkerékre nézve a $-\overrightarrow{n}$ (mínusz $\overrightarrow{n}$) irányból, az

a) ne forogjon;

b) a lehető leggyorsabban forogjon az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányba?

6. feladat. $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (x^2 - yz, y^2 - xz, z^2 - xy)$ egy folyadékáramlás időben állandó sebességtere. Egy kis lapátkereket helyezünk $P(1, -1, 1)$ centrummal az áramlás útjába. Hogyan kell választani a lapátkerék síkjának $\overrightarrow{n}$ normálvektorát ahhoz, hogy a lapátkerékre nézve a $-\overrightarrow{n}$ (mínusz $\overrightarrow{n}$) irányból, az

a) ne forogjon;

b) a lehető leggyorsabban forogjon az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányba?