Építőmérnöki Matematika MSc vizsga 2021.01.12, 9:10-10:40-ig. Minden feladat 15 pont.

Az egyes feladatokat nem feltétlenül kell külön lapra írni, de legyen egyértelmű, hogy melyik megoldás melyik feladathoz tartozik. Kérjük, hogy **állított A4 formátumban** fényképezze le a megoldásait, és azokat így illessze be a pdf fájlba. A javítást jelentősen megkönnyíti, ha a pdf-be a feladatok megoldásait a feladatsoron szereplő sorrendben fűzi össze. Kérem, hogy minden lap tetejére írja fel a nevét és a Neptun kódját.

A megoldásairól készített fényképeket **egyetlen**, (szükség szerint több oldalas), **legfeljebb 10 MByte méretű pdf** fájlban töltse fel a Moodle felületére, pontosabban a `https://edu.epito.bme.hu` oldalon a Matematika MSc Építőmérnököknek, BMETE90MX33 tárgy **Vizsga 2021.01.12-én** Témában (topic) található **"Vizsga" feladat**ba (assignment). A feltöltésre a vizsgát követő 10 perc áll rendelkezésre, azaz ezt **10:50-ig** kell megtennie.

Kérem, hogy a dolgozat elejére jegyezze fel és írja alá a következő mondatot:
„Az alábbi dolgozatot önállóan, külső segítség nélkül, kizárólag a megengedett segédeszközöket használva készítem el.”

1. feladat. Határozzuk meg az $u(x,t)$ függvényt, ha
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < t, 0 < x < \pi \\ u(x,0) = \sin 4x + \sin 6x - \sin 8x, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 5, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \end{cases} & \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0 & 0 < t \end{cases}$$
(Segítség: képletgyűjtemény, 2. oldal, 5/(c) képlet.)

1. feladat. Határozzuk meg az $u(x,t)$ függvényt, ha
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < t, 0 < x < \pi \\ u(x,0) = \sin 2x - \sin 3x - \sin 5x, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 6, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \end{cases} & \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0 & 0 < t \end{cases}$$
(Segítség: képletgyűjtemény, 2. oldal, 5/(c) képlet.)

2. feladat. Keressük meg a $(-4,5), (-1,4), (0,3), (2,2)$ és $(3,-2)$ pontokra legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedő egyenes egyenletét.

2. feladat. Keressük meg a $(-3,-5), (-2,-2), (0,1), (1,3)$ és $(4,5)$ pontokra legkisebb négyzetes értelemben legjobban illeszkedő egyenes egyenletét.

3. feladat. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris értékeit.

3. feladat. Határozzuk meg az $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris értékeit.

4. feladat. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2+z, z^2, y)$ vektormezőt és legyen γ az $A = (0,2,1)$ pontból a $B = (-1,1,0)$ pontba húzott egyenes szakasz. A vonalintegrál definícióját használva számoljuk ki $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ értékét.

4. feladat. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (yx, x^2, z)$ vektormezőt és legyen γ az $A = (0,1,0)$ pontból a $B = (1,0,2)$ pontba húzott egyenes szakasz. A vonalintegrál definícióját használva számoljuk ki $\int_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ értékét.

5. feladat. Legyen $\mathcal{F}$ az a felület, amely az $\{(x,y,z) : x^2+z^2 = 4,\ -1 \le y \le 1\}$ *körhenger* alakú cső palástjából, valamint $\{(x,y,z) : x^2+z^2 \le 4, y = -1\}$ aljából áll, kifelé irányítva. Tekintsük továbbá a $\overrightarrow{G}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{G}(x,y,z) = (e^y \sin(z)+x, 2, z-y^2x^2)$ vektormezőt. Határozzuk meg a Gauss tétel segítségével az $\iint\limits_{\mathcal{F}} \overrightarrow{G} d\overrightarrow{A}$ felületi integrált! (Figyelem, $\mathcal{F}$ nem tartalmazza a körhenger alakú csövet felülről lezáró körlapot!)

5. feladat. Legyen $\mathcal{F}$ az $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 = 1, 0 \le z\}$, *félgömb* felülete, kifelé mutató normálissal irányítva, továbbá tekintsük a $\overrightarrow{G}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{G}(x,y,z) = (e^{y^2+z^2} - x, \cos(x^2) + \sin(zx) + 2y, -1)$ vektormezőt. Határozzuk meg a Gauss tétel segítségével az $\iint\limits_{\mathcal{F}} \overrightarrow{G} d\overrightarrow{A}$ felületi integrált! (Figyelem, $\mathcal{F}$ nem tartalmazza a félgömböt lezáró körlapot!)

6. feladat. Legyen $\overrightarrow{G}(x,y) = (-yx^2 - y^3, y^2x + x^3)$ és γ az $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$ félkörlemez határa, óramutató járásával megegyező irányítással. Számoljuk ki az $\int_\gamma \overrightarrow{G} d\mathbf{r}$ vonatlintegrált. (*Javaslat:* Green tétel és polárkoordináták.)

6. feladat. Legyen $\overrightarrow{G}(x,y) = (2xy^2, y^3 + x^2y)$ és γ az $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ x,y \ge 0\}$ negyedkörlemez határa, óramutató járásával megegyező irányítással. Számoljuk ki az $\int_\gamma \overrightarrow{G} d\mathbf{r}$ vonalintegrált. (*Javaslat:* Green tétel és polárkoordináták.)