Építőmérnöki Matematika MSc vizsga 2021.01.05, 9:10-10:40-ig. Minden feladat 15 pont.

Az egyes feladatokat nem feltétlenül kell külön lapra írni, de legyen egyértelmű, hogy melyik megoldás melyik feladathoz tartozik. Kérjük, hogy **állított A4 formátumban** fényképezze le a megoldásait, és azokat így illessze be a pdf fájlba. A javítást jelentősen megkönnyíti, ha a pdf-be a feladatok megoldásait a feladatsoron szereplő sorrendben fűzi össze. Kérem, hogy minden lap tetejére írja fel a nevét és a Neptun kódját.

A megoldásairól készített fényképeket **egyetlen**, (szükség szerint több oldalas), **legfeljebb 10 MByte méretű pdf** fájlban töltse fel a Moodle felületére, pontosabban a `https://edu.epito.bme.hu` oldalon a Matematika MSc Építőmérnököknek, BMETE90MX33 tárgy **Vizsga 2021.01.05-én** Témában (topic) található **"Vizsga" feladat**ba (assignment). A feltöltésre a vizsgát követő 10 perc áll rendelkezésre, azaz ezt **10:50-ig** kell megtennie.

Kérem, hogy a dolgozat elejére jegyezze fel és írja alá a következő mondatot:
„Az alábbi dolgozatot önállóan, külső segítség nélkül, kizárólag a megengedett segédeszközöket használva készítem el."

1. feladat. Tekintsük az alábbi *hővezetési problémát.* Határozzuk meg az $u(x,t)$ függvényt.

$$\begin{array}{ll} u'_t = 2u''_{xx} & 0 \le x \le 4, t \ge 0; \\ u(0,t) = u(4,t) = 0 & t \ge 0; \\ u(x,0) = \sin(\pi x) + \cos(\frac{\pi}{4}x)\sin(\frac{\pi}{2}x) & 0 \le x \le 4. \end{array}$$

1. feladat. Tekintsük az alábbi *hővezetési problémát.* Határozzuk meg az $u(x,t)$ függvényt.

$$\begin{array}{ll} u'_t = 5u''_{xx} & 0 \le x \le 3, t \ge 0; \\ u(0,t) = u(3,t) = 0 & t \ge 0; \\ u(x,0) = \sin(\pi x) + \sin(\frac{\pi}{3}x)\cos(\frac{2\pi}{3}x) & 0 \le x \le 3. \end{array}$$

2. feladat. (a) Írjuk fel az $\mathbb{R}^2$-ből az $y = -2x$ egyenesre való merőleges vetítés mátrixát, majd (b) határozzuk meg a $P = (1,3)$ pontnak a merőleges vetületét erre az egyenesre.

2. feladat. (a) Írjuk fel az $\mathbb{R}^2$-ből az $y = 3x$ egyenesre való merőleges vetítés mátrixát, majd (b) határozzuk meg a $P = (1,2)$ pontnak a merőleges vetületét erre az egyenesre.

3. feladat. Hozzuk kanonikus alakra a következő kvadratikus alakot és *rajzoljuk le* a megfelelő kúpszeletet.

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 = 5.$$

3. feladat. Hozzuk kanonikus alakra a következő kvadratikus alakot és *rajzoljuk le* a megfelelő kúpszeletet.

$$13x^2 + 32xy + 37y^2 = 5.$$

4. feladat. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y) = (-2(x^2+y^2)y, 2(x^2+y^2)x)$ vektormezőt. (a) Síkbeli Curl-teszt segítségével döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Határozzuk meg az $\int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált a $\gamma : \mathbf{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t);\ 0 \le t \le 2\pi$ görbe mentén.

4. feladat. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y) = (-4(x^2+y^2)y, 4(x^2+y^2)x)$ vektormezőt. (a) Síkbeli Curl-teszt segítségével döntsük el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$. (b) Határozzuk meg az $\int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált a $\gamma : \mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t);\ 0 \le t \le 2\pi$ görbe mentén.

5. feladat. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy, -x^3z + e^x, z^2)$ vektormezőt és az $\mathcal{F}:\ \mathbf{r}(u,v) = (u\cos(v), 2u\sin(v), 2);\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi$ felületet (ez egy ellipszis alakú lemez) felfelé mutató normálissal. Számoljuk ki a $\iint\limits_{\mathcal{F}} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{A}$ felületi integrált!

5. feladat. Tekintsük az $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x^2 + y, -e^x z^2, z^3)$ vektormezőt és az $\mathcal{F}:\ \mathbf{r}(u,v) = (3u\cos(v), u\sin(v), 1);\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi$ felületet (ez egy ellipszis alakú lemez) felfelé mutató normálissal. Számoljuk ki a $\iint\limits_{\mathcal{F}} \overrightarrow{F} d\overrightarrow{A}$ felületi integrált!

6. feladat. $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y^3 + z^2, x + z, x^2 y)$ egy folyadékáramlás időben állandó sebességtere. Egy kis lapátkereket helyezünk $P = (2,-1,1)$ centrummal az áramlás útjába. Hogyan kell választani a lapátkerék síkjának $\overrightarrow{n}$ normálvektorát ahhoz, hogy a lapátkerékre nézve a $-\overrightarrow{n}$ (mínusz $\overrightarrow{n}$) irányból, az a lehető leggyorsabban forogjon az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányba?

6. feladat. $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (y^2 z, x^3 + z^2, x + y)$ egy folyadékáramlás időben állandó sebességtere. Egy kis lapátkereket helyezünk $P = (-2,3,1)$ centrummal az áramlás útjába. Hogyan kell választani a lapátkerék síkjának $\overrightarrow{n}$ normálvektorát ahhoz, hogy a lapátkerékre nézve a $-\overrightarrow{n}$ (mínusz $\overrightarrow{n}$) irányból, az a lehető leggyorsabban forogjon az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányba?