

1. Határozza meg azt az  $u(x, t)$  függvényt, amely az alábbi rezgő húr probléma megoldása:

$$\begin{cases} u''_{tt}(x, t) = 9u''_{xx}(x, t) & x \in [0, 2], t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0 & x \in [0, 2] \\ u'_t(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \sin(2\pi x) & x \in [0, 2] \\ u(0, t) = u(2, t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

2. Legyen  $V$  az  $\mathbb{R}^4$  térnek az alábbi vektorok által kifeszített altere:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Válasszon ki a  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  vektorokból néhányat úgy, hogy azok  $V$  bázisát adják!  
 (b)  $\dim(V) = ?$   $\dim(V^\perp) = ?$

3. Tekintse az  $A = \begin{pmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{pmatrix}$  mátrixot.

- (a) Mutassa meg, hogy  $A$  pozitív definit, majd  
 (b) adjon meg egy olyan  $B$  pozitív definit mátrixot, melyre  $A = B^2$ !

4. Tekintse a  $\vec{F}(x, y, z) = (2xyz + e^{xy}y, x^2z + e^{xy}x, x^2y + 2z)$  vektormezőt.

- (a) Curl-teszt alapján döntse el, konzervatív-e  $\vec{F}$ ! Amennyiben igen, határozza meg a potenciált!  
 (b) Jelölje  $\gamma$  a 2 sugarú zárt körvonalat, az  $(1, 1, 1)$  pont körül, az  $xy$  síkkal párhuzamos síkban.  $\int_\gamma \vec{F} d\mathbf{r} = ?$

5. Tekintse a  $\vec{G}(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$  vektormezőt, valamint az  $\mathcal{F} : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, 3u - 4v)$ ;  $0 \leq u \leq 1$ ;  $0 \leq v \leq 1$  felületet, **lefelé mutató** normálvektorral. Számolja ki az  $\iint_{\mathcal{F}} \vec{G} d\vec{A}$  felületi integrált!

6.  $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + z^2, xyz, x + z)$  egy folyadékáramlás időben állandó sebességtere. Egy kis lapátkereket helyezünk  $P = (1, 0, 2)$  centrummal az áramlás útjába. Hogyan kell választani a lapátkerek síkjának  $\vec{n}$  normálvektorát ahhoz, hogy a lapátkerekre nézve a  $-\vec{n}$  (mínusz  $\vec{n}$ ) irányból, az a lehető leggyorsabban forogjon az óramutató járásával ellentétes (pozitív) irányba?