Építőmérnöki Matematika MSc vizsga; 2022.01.24. 9:10–10:40. Minden feladat 15 pont.

1. Határozza meg az $u(x,t)$ függvényt, ha $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < t, 0 < x < \pi \\ u(x,0) = \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 4, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0, \pi \end{cases} & \\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0 & 0 < t \end{cases}$

   (Segítség: képletgyűjtemény, 2. oldal, 5/(c) képlet.)

2. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$. $rank\, A =?$ $nullity\, A =?$ $nullity(A^T)$=?

3. Mutassa meg, hogy az $A = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ mátrix pozitív definit, majd keresse meg azt a B pozitív definit mátrixot, melyre $A = B^2$!

4. Tekintse az $\overrightarrow{F}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{F}(x,y,z) = (3x^2y + z^2\cos x, 2 + x^3, 2z\sin x + 6)$ vektormezőt.

   (a) Curl teszt segítségével döntse el, potenciálos-e $\overrightarrow{F}(\mathbf{r})$!

   (b) Legyen γ az $A \to B \to C$ töröttvonal, ahol $A = (0,1,1)$, $B = (2,3,5)$ és $C = (0,2,-1)$. Határozza meg a $\int\limits_\gamma \overrightarrow{F} d\mathbf{r}$ vonalintegrált!

5. Legyen $\mathcal{F}$ az $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \le x\}$, *félgömb* felülete, kifelé mutató normálissal irányítva, továbbá tekintsük a $\overrightarrow{G}(\mathbf{r}) = \overrightarrow{G}(x,y,z) = (3, \cos(x^3 + z^4) - 2y, e^{-y^2} + 3z)$ vektormezőt. Határozzuk meg a Gauss tétel segítségével az $\iint\limits_{\mathcal{F}} \overrightarrow{G}\, d\overrightarrow{A}$ felületi integrált! (Figyelem, $\mathcal{F}$ nem tartalmazza a félgömböt balról lezáró körlapot!)

6. Legyen $\overrightarrow{G}(x,y) = (-4yx^2 - 3y^3, y^2x + 2x^3)$ és γ az $\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1,\ x,y \ge 0\}$ negyedkörlemez határa, óramutató járásával *megegyező* irányítással. Számoljuk ki az $\int_\gamma \overrightarrow{G} d\mathbf{r}$ vonalintegrált. (*Javaslat:* Green tétel és polárkoordináták.)